Peter Zeiner

Fakultät für Mathematik,
Universität Bielefeld

Bielefeld, 19. Mai 2009

Mathematik für Biologen, Biotechnologen und Biochemiker

Sommersemester 2009

Übungsblatt 6

(18) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

(3 Infopunkte)

(19) Eine Population bestehe aus neugeborenen, einjährigen und zweijährigen Individuen. Im Jahr n sei deren Anzahl durch den Vektor $x(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{pmatrix}$ gegeben. Im darauffolgenden Jahr sei die Zahl der Individuen durch $x(n+1) = Ax(n)$ gegeben, wobei die Matrix A durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 7 \\ \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.
Hinweis: $(\lambda^2 + \lambda + \frac{2}{9})(\lambda - 1) = ?$

(b) Welche Eigenvektoren kann man biologisch interpretieren?

(c) Im Jahr 0 sei die Population durch $x(0) = \begin{pmatrix} 3780 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Wie viele Individuen jeden Alters gibt es nach drei Jahren? Wie schaut die Population nach 20 Jahren ungefähr aus? Interpretieren Sie das Ergebnis.
Hinweis: Es gilt $x(n) = A^n x(0)$. Falls Sie die diversen Matrixmultiplikationen nicht alle durchführen und den TutorInnen das Korrigieren erleichtern wollen, beachten Sie Aufgabe 17 und verwenden Sie, dass

$$\begin{pmatrix} 3780 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 27 \begin{pmatrix} 63 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} - 45 \begin{pmatrix} 21 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} + 72 \begin{pmatrix} 42 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gilt.

(4+1+2 Infopunkte)

Bitte wenden!

(20) Sei $z_1 = 3+i$, $z_2 = 1+i$. Berechnen Sie $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, z_2^2, z_1^2 und skizzieren Sie diese Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene.
Hinweis: Verwenden Sie Satz 4.5, um den Nenner reell zu machen.

(2 Infopunkte)

(21) (a) Seien $w = u + iv$, $z = x + iy$ zwei komplexe Zahlen. Zeigen Sie, dass $\bar{w}\bar{z} = \overline{(wz)}$ gilt. Folgern Sie daraus, dass $\bar{z}^n = \overline{z^n}$ gilt.

(b) Sei w eine Nullstelle des Polynoms $P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_0$ mit $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, d.h. $P(w) = 0$. Zeigen Sie, dass $\bar{w}$ eine Nullstelle des Polynoms $Q(z) = \bar{c}_n z^n + \bar{c}_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \bar{c}_0$ ist. Schließen Sie daraus, dass für jedes reelle Polynom (d.h. $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$) gilt: Ist w eine Nullstelle von $P(z)$, so ist auch $\bar{w}$ eine Nullstelle von $P(z)$.

(2 Infopunkte)

(22) (a) Lösen Sie die Gleichung $z^2 - 2z + 5 = 0$ in $\mathbb{C}$.

(b) Geben Sie alle drei Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$ an. Wählen Sie zwei dieser Lösungen aus und machen Sie für diese die Probe, d.h. berechnen Sie deren dritte Potenz.
Hinweis: Wiederholen Sie, für welche Werte von φ man $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ explizit angeben kann.

(1+2 Infopunkte)

Abgabe bis zum 26.5.2009, 12.00 Uhr