
Mathematik für Biologen, Biotechnologen und Biochemiker

Sommersemester 2009

Übungsblatt 8

(28) Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n\left(n + \frac{1}{2}\right)(n + 1)$$

gilt.

(3 Infopunkte)

(29) Geben Sie für jede der folgenden Folgen an, ob sie konvergent, divergent, oder uneigentlich konvergent ist (mit Begründung). Geben Sie den Grenzwert an, falls die Folge konvergent ist

(a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

(b) $b_n = n^4$

(c) $c_n = (-1)^n n^4$

(d) $d_n = \frac{2n^3 + n^2 + 1}{n^3 + 2n^2 - 1}$

(e) $f_n = 2 - 2^{-n}$

(f) $g_n = 3^n(6^{-n} - 3^{-n+1})$

(6 Infopunkte)

(30) Wir betrachten nochmals die Kaninchenpopulation aus Aufgabe (26). Zur Erinnerung: Die Zahl der Kaninchenpaare im Monat n ist durch $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\tau^n - \sigma^n)$ gegeben, wobei $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\sigma = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Jedes Kaninchenpaar (unabhängig vom Alter) fresse pro Monat 2kg Karotten. Wie viele kg Karotten hat die Kaninchenpopulation nach n Monaten insgesamt gefressen?

(2 Infopunkte)

Bitte wenden!

(31) Man kann zeigen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert und den Wert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad (1)$$

besitzt. Benützen Sie dieses Ergebnis, um die folgenden beiden Summen zu berechnen.

(a) Summieren Sie nur die geraden Terme, d.h. berechnen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \dots \quad (2)$$

Hinweis: Es besteht ein einfacher Zusammenhang zwischen (1) und (2).

(b) Summieren Sie nur die ungeraden Terme, d.h. berechnen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \quad (3)$$

Hinweis: Wie hängt diese Summe mit den obigen zwei zusammen?

(2 Infopunkte)

Abgabe bis zum 9.6.2009, 12.00 Uhr