

Sommersemester 2010

Mathematik II für NWI/Lineare Algebra

Übungszettel 14

Aufgabe 60: Zeigen Sie:

- (a) Ist A normal, so ist $aA + bE_n \forall a, b \in \mathbb{C}$ ebenfalls normal.
- (b) Ist A normal und U eine unitäre Matrix, so ist U^+AU ebenfalls normal.
- (c) Seien A und B kommutierende Matrizen, d. h. $AB = BA$, und x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ . Zeigen Sie, dass auch Bx ein Eigenvektor von A ist. Schließen Sie daraus, dass $\text{Eig}(A, \lambda)$ ein B -invarianter Unterraum ist.

(1+1+2 Punkte)

Aufgabe 61: Sei $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$.

- (a) Ist A hermitesch, orthogonal, unitär, normal? Was folgt daraus für die Eigenwerte?
- (b) Diagonalisieren Sie A , wie lauten die Eigenvektoren von A ?
- (c) Berechnen Sie $\cos \pi A$ und $\sin \pi A$. Sind diese Matrizen invertierbar?

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 62: (a) Zeigen Sie, dass $A = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 5 \end{pmatrix}$ positiv definit ist.

- (b) Wie lauten die Eigenvektoren von A ?
- (c) Berechnen Sie die positive Wurzel $A^{\frac{1}{2}}$.
- (d) Berechnen Sie $\ln A$.

(1+1+1+1 Punkte)

Aufgabe 63: Eine Matrix P heißt Projektionsmatrix, falls $P^2 = P$ gilt.

- (a) Zeigen Sie, dass nur 0 und 1 Eigenwerte von P sein können.
- (b) Seien P und Q Projektionsmatrizen. Unter welchen Bedingungen ist $P+Q$ eine Projektionsmatrix?
- (c) Sei $A = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Gibt es ein oder mehrere $a \in \mathbb{C}$, für die A eine Projektionsmatrix ist?

(1+1+1 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 64: Zusatzaufgabe

Wir betrachten die Transformation auf Kugelkoordinaten, gegeben durch

$$x = r \cos(\vartheta) \cos(\varphi)$$

$$y = r \cos(\vartheta) \sin(\varphi)$$

$$z = r \sin(\vartheta)$$

- (a) Berechnen Sie die zugehörige Jacobi-Matrix und leiten Sie aus ihrer Determinante die Umrechnung für das Volumenelement $dx \, dy \, dz$ ab.
- (b) Berechnen Sie damit (erneut) das Volumen der Kugel vom Radius R um den Ursprung.

(2 (Jacobi-Matrix)+2 (Volumenelement)+1 Punkte)

Abgabe bis zum 16.7.2010!