

**MUSTERLÖSUNG ZU AUSGEWÄHLTEN AUFGABEN DER KLAUSUR
VOM 22. JULI 2011**

Aufgabe 1.

(b*) Was ist bei dem Integral

$$\int_0^1 \int_{1-y^2}^{1+y^2} (x+y^2) dx dy$$

beim Vertauschen der Integrationsreihenfolge zu beachten?

Lösung.

- Integrationsgrenzen sind anzupassen.
- Integrationsgrenzen für die Integration $\int dy$ werden von x abhängen, diejenigen für die Integration über x hängen nicht mehr von y ab.

Bemerkung: Nach Vertauschung der Integrationsgrenzen erhält man das Integral (machen Sie sich eine Skizze für den Integrationsbereich)

$$\int_0^2 \int_{\sqrt{|1-x|}}^1 (x+y^2) dy dx.$$

Aufgabe 4.

(b) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{C}^n . Ist dann durch $\|\cdot\|_i = i\|x\|$ eine weitere Norm definiert (i imaginäre Einheit)?

Lösung. Nein, denn $\|x\|_i \notin \mathbb{R}^+$, falls $x \neq 0$.

Aufgabe 6.

(c) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\text{tr}(SAS^{-1})$.

Lösung. Es gilt

$$\text{tr}(SAS^{-1}) = \text{tr}(A) = 1 + 3 + 0 + 2 = 6.$$

Aufgabe 8.

(c*) Die $n \times n$ -Matrix A habe die Eigenschaft $A = -A^+$. Welche Eigenschaft besitzt die Matrix $B = iA$? Was kann man über die Eigenwerte von A und B aussagen.

Lösung. Es gilt

$$B^+ = (iA)^+ = -i(-A) = iA = B,$$

also ist B hermitesch. Die Eigenwerte von B sind reell und folglich sind die Eigenwerte von A rein imaginär.