MUSTERLÖSUNG ZU AUSGEWÄHLTEN AUFGABEN DER KLAUSUR VOM 04. OKTOBER 2011

Aufgabe 1.

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\iint\limits_S \frac{1}{(x+y)^2}\, dx\, dy,$$

wobei S das Quadrat $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x+y \leq 2, \quad 0 \leq x-y \leq 1\}$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Transformation:

$x = \frac{1}{2}(u+v)$

$y = \frac{1}{2}(u-v)$

deren Umkehrung durch $u = x+y, v = x-y$ gegeben ist.

Lösung. Zunächst berechnen wir die Jakobi-Matrix.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = A.$$

Daraus folgt

$$\det A = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = |\det A|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Transformiere die Menge S zu

$$S' = \Big\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq u \leq 2,\ 0 \leq v \leq 1 \Big\}.$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S \frac{1}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint\limits_{S'} \frac{1}{u^2}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int\limits_1^2 \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u \int\limits_0^1 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}v = -\frac{1}{u}\Big|_1^2 \cdot \frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ konvergierende Folge im $\mathbb{R}^3$. Ist dann $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \langle a, x_n\rangle$ für jedes beliebige, aber feste $a \in \mathbb{R}^3$ eine Nullfolge?

Lösung. Ja, denn es gilt $|c_n| = |\langle a, x_n \rangle| \leq \|a\| \|x_n\|$, wobei die Ungleichung wegen der Cauchy-Schwartz'schen Ungleichung gilt. Da $\|x_n\| \to 0$ ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Aufgabe 5.

(b) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor der Matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist. Wie lautet der dazugehörige Eigenwert? Ist seine algebraische Vielfachheit gleich 1?

Lösung. Es gilt

$$B \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also ist $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 4$. Seine algebraische Vielfachheit ist 1, denn $\operatorname{tr} B = 5 = 4 + \lambda_2$, also $\lambda_2 = 1 \neq \lambda_1$.

Aufgabe 8.

(a) Seien A und B hermitesche Matrizen. Zeigen Sie, dass A und B vertauschen, falls $AB - BA$ hermitesch ist.

Lösung. Es gilt

$$AB - BA = (AB - BA)^+ = B^+ A^+ - A^+ B^+ = BA - AB.$$

Also gilt $AB - BA = -(AB - BA)$ und daraus folgt $AB - BA = 0$ und daher $AB = BA$.