Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 8.4.2011

- Sommersemester 2011

Mathematik II für NWI/Lineare Algebra

Übungszettel 1

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Determinanten

$$\det\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 5 & 8 & 11\\ 3 & 8 & 14 & 20\\ 4 & 11 & 20 & 30\end{pmatrix},$$

indem Sie die Matrizen auf obere Dreiecksform bringen. **(4 Punkte)**

Aufgabe 2: Seien B eine $n \times n$-Matrix, $c \in K$ und sei $f : M(n \times n, K) \to K$ definiert durch

$$f(A) := c\det(AB).$$

Zeigen Sie (ohne den Satz über das Produkt von Determinanten zu verwenden)

(a) $f(A)$ ist linear in jeder Zeile

(b) $f(A)$ ist alternierend, d. h. $f(A) = 0$ falls A zwei gleiche Zeilen besitzt.

Unter welchen Bedingungen erfüllt f die Normierungsbedingung $f(E_n) = 1$?

(2+2+1 Punkte)

Aufgabe 3: Sei A eine $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A.$$

(1 Punkt)

Aufgabe 4: Für welche a ist $A = \begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & -1\\ a & -1 & 1\end{pmatrix}$ invertierbar?

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Determinante! **(3 Punkte)**

Aufgabe 5: (a) Berechnen Sie die Zahl der Fehlstände der Transposition

$$\tau = (k\ell) = \begin{pmatrix}1 & \cdots & k-1 & k & k+1 & \cdots & \ell-1 & \ell & \ell+1 & \cdots & n\\ 1 & \cdots & k-1 & \ell & k+1 & \cdots & \ell-1 & k & \ell+1 & \cdots & n\end{pmatrix} \text{ mit } k < \ell.$$

Wie lautet $\mathrm{sign}(\tau)$?

(b) Berechnen Sie $\tau = \sigma^{-1}(12)\sigma$, wobei $k := \sigma^{-1}(1), \ell := \sigma^{-1}(2)$.
Hinweis: Berechnen Sie $\tau(k), \tau(\ell)$ und $\tau(i)$ für $i \neq k, \ell$.

(c) Begründen Sie, warum man jede Transposition $\tau = (k\ell)$ in der Form $\tau = \sigma^{-1}(12)\sigma$ darstellen kann. Wenn Sie alle σ angeben, für die $\tau = \sigma^{-1}(12)\sigma$ gilt, erhalten Sie einen Bonuspunkt. (Achtung: hier könnte eine Falle versteckt sein.)

(2+2+1 Punkte)

Abgabe bis zum 15.4.2011!