Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 10.6.2011

Sommersemester 2011

Mathematik II für NWI/Analysis

Übungszettel 10

Aufgabe 43: (Kurven) Berechnen Sie die Längen der Kurven, die durch folgende Parametrisierungen gegeben sind

(a) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(t) := (t, g(t))^T$ und $g(t) = t^{3/2}$ (Länge des Graphen der Funktion $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t^{3/2}$).

(b) $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}^2$ mit $f(t) := \mathrm{e}^{\lambda t}(\cos(t), \sin(t))^T$ für $\lambda, a \in \mathbb{R}$ und $\lambda < 0$ (Länge der logarithmischen Spirale).

(c) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ mit $f(t) = (\cos(2t), \sin(2t), 2\cosh(t))^T$.

(1+2+2 Punkte)

Aufgabe 44: (Partielle Ableitungen)

(a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ mit $(x,y) \mapsto \log(xy)$.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $(x,y) \mapsto y^3 + ayx^2$. Bestimmen Sie die Konstante a so, dass $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

(c) Zeigen Sie, dass für

$$f\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

gilt: $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$.

(1+1+3 Punkte)

Aufgabe 45: (Jacobi-Matrizen) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen der folgenden Funktionen

(a) $f\colon \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}^2$ mit $(x,y,z) \mapsto (1 + \ln(x), x\sqrt{y} + \sqrt{z})^T$

(b) $f\colon \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^3$ mit $(x,y) \mapsto (xy, \cosh(xy), \exp(ax/y))^T$ für eine Konstante $a \in \mathbb{R}$.

(1+2 Punkte)

Aufgabe 46: (Rechenregeln total differenzierbarer Funktionen)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f, g\colon U \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch $\alpha f + \beta g\colon U \to \mathbb{R}^m$, gegeben durch $(\alpha f + \beta g)(x) := \alpha f(x) + \beta g(x)$ total differenzierbar ist und es gilt

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$

(2 Punkte)

Aufgabe 47*: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ total differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann auch $f \cdot g\colon U \to \mathbb{R}$, gegeben durch $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ total differenzierbar ist mit

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

(2 Zusatzpunkte)

Abgabe bis zum 17.6.2011!