Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 17.6.2011

Sommersemester 2011

Mathematik II für NWI/Analysis

Übungszettel 11

Aufgabe 48: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^4 + 4xy + 2y^2$

(a) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f, d. h., die Punkte, für die $Df(x,y) = 0$ gilt.

(b) Untersuchen Sie, ob diese Punkte isolierte lokale Minima oder Maxima sind.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 49: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$

(a) Für welche (x,y) ist die Jacobimatrix $Df(x,y)$ invertierbar?

(b) Ist f bijektiv? Wenn ja, geben Sie die Umkehrfunktion an. Wenn nein, finden Sie eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$, sodass die Einschränkung von f auf U, also $f|_U : U \to f(U), (x,y) \to f(x,y)$ bijektiv ist. Wie lautet die Umkehrfunktion?

(2+2 Punkte)

Aufgabe 50: Untersuchen Sie, ob die Gleichung $F(x,y) = 0$ um den Punkt (x_0, y_0) nach y aufgelöst werden kann, d. h., ob eine Funktion $\varphi : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ mit $F(x, \varphi(x)) = 0$ und $\varphi(x_0) = y_0$ existiert. Falls ja, bestimmen Sie $\varphi'(x_0)$.

(a) $F(x,y) = e^{x^2+y^2} - e^2, \quad (x_0, y_0) = (1,1)$

(b) $F(x,y) = \sin x \cdot \cos y, \quad (x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(c) $F(x,y) = \sin x \cdot \cos y, \quad (x_0, y_0) = (0,0)$ **(2+2+1 Punkte)**

Aufgabe 51: (a) Sei $g(x,y) = 2x^3 - 3x^2y + y^3$. Bestimmen Sie das isolierte lokale Minimum der Funktion $f(x,y) = y$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 1$ mit Hilfe der Methode von Lagrange.
Hinweis: Sie müssen nicht überprüfen, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt. **(3 Punkte)**

(b*) Durch $g(x, \varphi(x)) = 1$ wird in der offenen Menge $\{(x,y) | y > x \text{ und } 2x+y > 0\}$ implizit eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert. Bestimmen Sie das Minimum von φ.
Hinweis: Sie müssen nicht zeigen, dass es sich um ein Minimum handelt. Wenn Sie trotzdem ein Argument finden, warum es ein Minimum ist, gibt es einen weiteren Zusatzpunkt. Siehe Abbildung 1. **(1 Zusatzpunkt)**

(bitte wenden)

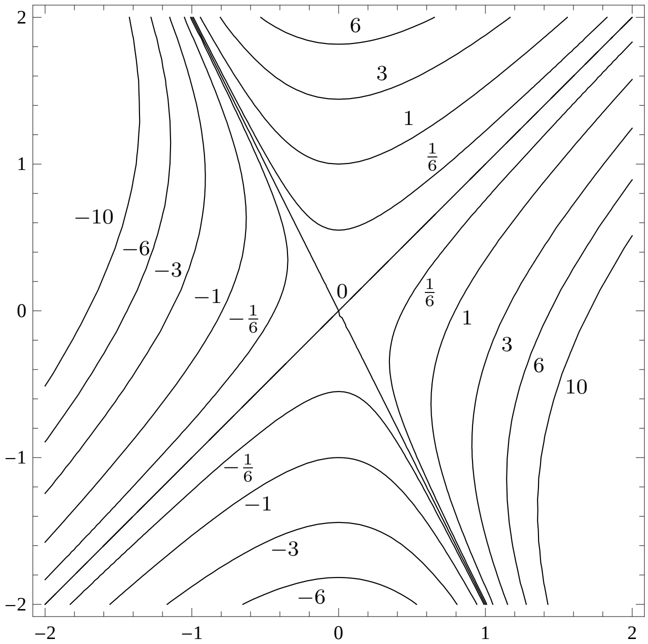

Abbildung 1: Höhenlinien $g(x, y) = a$ der Funktion $g(x, y) = 2x^3 - 3x^2y + y^3$ für die Werte $a = 0, \pm\frac{1}{6}, \pm1, \pm3, \pm6, \pm10$

Empfehlung: Plotten Sie alle vorkommenden Funktionen und vergleichen Sie die Plots mit Ihren Ergebnissen.

Abgabe bis zum 24.6.2011!