Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 01.7.2011

Sommersemester 2011

Mathematik II für NWI/Lineare Algebra

Übungszettel 13

Aufgabe 57: Zeigen Sie:

(a) Ist A eine normale $n \times n$-Matrix, so ist $aA + bE_n \; \forall \; a, b \in \mathbb{C}$ ebenfalls normal.

(b) Ist A normal und U eine unitäre Matrix, so ist U^+AU ebenfalls normal.

(c) Seien A und B kommutierende Matrizen, d. h. $AB = BA$, und x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Zeigen Sie, dass auch Bx ein Eigenvektor von A ist. Schließen Sie daraus, dass $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$ ein B-invarianter Unterraum ist.

(1+1+2 Punkte)

(d*) Sei A normal. Zeigen Sie, dass für beliebige Vektoren $x \in \ker(A)$ und $y \in \mathrm{im}(A)$ gilt: $\langle x, y \rangle = 0$.
Hinweis: Jeder Vektor $y \in \mathrm{im}(A)$ lässt sich als $y = Av$ mit $v \in \mathbb{R}^n$ schreiben. Zeigen Sie zunächst $\ker(A) = \ker(A^+)$. **(1 Zusatzpunkt)**

Aufgabe 58: Sei $A = a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Für welche a ist A hermitesch, orthogonal, unitär, normal?

(b) Diagonalisieren Sie A, wie lauten die Eigenvektoren von A?

(c) Berechnen Sie $\cos \pi A$ und $\sin \pi A$ für den Fall $a = \frac{1}{2\sqrt{5}}$. Sind diese Matrizen invertierbar? **(2+2+2 Punkte)**

Aufgabe 59: (a) Zeigen Sie, dass $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ positiv definit ist.

(b) Wie lauten die Eigenvektoren von A?

(c) Berechnen Sie die positive Wurzel $A^{\frac{1}{2}}$.

(d) Berechnen Sie $\ln A$. **(1+1+1+1 Punkte)**

Aufgabe 60: Eine Matrix P heißt Projektionsmatrix, falls $P^2 = P$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass nur 0 und 1 Eigenwerte von P sein können.

(b) Seien P und Q Projektionsmatrizen, für die $[P, Q] = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass dann auch PQ eine Projektionsmatrix ist.

(c) Sei $A = a\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Gibt es ein oder mehrere $a \in \mathbb{C}$, für die A eine Projektionsmatrix ist? **(1+1+1 Punkte)**

Abgabe bis zum 08.07.2011!