Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 15.4.2011

Sommersemester 2011

Mathematik II für NWI/Lineare Algebra

Übungszettel 2

Aufgabe 6: Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -a & -1 & -2 \\ 3 & 1 & a^2 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 0 & -a^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes. Für welche a ist A invertierbar?

(3 Punkte)

Aufgabe 7: Seien A und B reelle $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \det(A + xB)$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion ist. Zeigen Sie insbesondere $f^{(k)}(x) \equiv 0$ für alle $k > n$.

(2 Punkte)

Aufgabe 8: Eine reelle Matrix heißt ganzzahlig, wenn alle ihre Einträge Elemente aus $\mathbb{Z}$ sind. Sei A eine ganzzahlige $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie:

(a) Gilt $\det A = \pm 1$, so ist A^{-1} ebenfalls ganzzahlig. **(1 Punkt)**

(b)* A^{-1} ist genau dann ganzzahlig,wenn $\det A = \pm 1$ gilt. **(2 Zusatzpunkte)**

Aufgabe 9: Sei x ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ. Zeigen Sie

(a) x ist ein Eigenvektor von A^n für alle $n \geq 1$. Wie lautet der entsprechende Eigenwert?

(b) Sei A invertierbar. Dann ist x auch Eigenvektor von A^{-1}. Wie lautet der entsprechende Eigenwert?

(c) Sei A invertierbar. Dann ist x ein Eigenvektor von A^n für alle $n \in \mathbb{Z}$. Wie lauten die entsprechenden Eigenwerte? [Hinweis: Vergessen Sie den Fall $n = 0$ nicht.]

(d) Sei $B = \sum_{i=1}^{k} a_i A^i$ mit $a_i \in \mathbb{C}$. Dann ist x auch Eigenvektor von B. Wie lautet der entsprechende Eigenwert?

(1+1+1+1 Punkte)

Aufgabe 10: Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

Abgabe bis zum 21.4.2011, 10^{h}**!**