Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 21.4.2011

Sommersemester 2011

Mathematik II für NWI/Lineare Algebra

Übungszettel 3

Aufgabe 11: Sei A eine $n \times n$-Matrix, und $x \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Zeigen Sie

(a) Sx ist Eigenvektor von SAS^{-1}. Wie lautet der entsprechende Eigenwert? **(1 Punkt)**

(b) Die Matrix B vertausche mit A. Zeigen Sie, dass auch Bx ein Eigenvektor von A ist (zu welchem Eigenwert?). **(1 Punkt)**

(c) Ist A reell, so ist auch der komplex konjugierte Wert $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von A. Wie lautet ein entsprechender Eigenvektor? **(1 Punkt)**

(d)* Ist A reell, so sind die geometrischen Vielfachheiten von λ und $\bar{\lambda}$ gleich. **(2 Zusatzpunkte)**

(e)* Ist A reell, so sind die algebraischen Vielfachheiten von λ und $\bar{\lambda}$ gleich. **(2 Zusatzpunkte)**

Aufgabe 12: Eine reelle orthogonale $n \times n$-Matrix heißt Spiegelung, wenn sie nur die Eigenwerte ± 1 besitzt und der Eigenwert -1 die algebraische Vielfachheit 1 besitzt.

Zeigen Sie, dass

$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ eine Spiegelung ist. Diagonalisieren Sie A.

[*Hinweis :* $\sin\varphi = 2\sin(\frac{\varphi}{2})\cos(\frac{\varphi}{2})$, $\quad 1+\cos\varphi = 2\cos^2(\frac{\varphi}{2})$, $\quad 1-\cos\varphi = 2\sin^2(\frac{\varphi}{2})$] **(4 Punkte)**

Aufgabe 13: (a) Sei $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Eigenwerte von M, M^2 und M^3. Wie lauten ihre geometrischen Vielfachheiten? Was fällt auf? **(4 Punkte)**

(b) Eine Matrix N heißt nilpotent, falls ein $s \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $N^s = \mathbf{0}$ ist. Dabei sei $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ die Nullmatrix. Zeigen Sie, dass N nur den Eigenwert $\lambda = 0$ besitzt. **(1 Punkt)**

(c)* Sei N eine $n \times n$-Matrix, für die $N^n \neq \mathbf{0}$ gilt. Kann N nilpotent sein?
[Hinweis: Betrachten Sie die Bildräume von N^k, d. h. $\mathrm{im}(N^k) = \{N^k x | x \in \mathbb{C}^n\}$, (bzw. deren Kerne) und ihre Dimensionen. **(2 Zusatzpunkte)**

Aufgabe 14: Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und ihre Vielfachheiten:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$ **(3 Punkte)**

(bitte wenden)

Aufgabe 15: Gilt $xA = \lambda x$ für $x \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$, so heißt x linksseitiger Eigenvektor zum (linksseitigen) Eigenwert λ.
Zeigen Sie:

(a) Ist x Eigenvektor von A, so ist x^T linksseitiger Eigenvektor von A^T. **(1 Punkt)**

(b) Finden Sie eine Bedingung für die Eigenwerte einer reellen orthogonalen Matrix A.
$\big[$ Hinweis: Betrachten Sie $\bar{x}^T A^T A x$, beachten Sie $\bar{x}^T x > 0$, falls $x \neq 0$, und verwenden Sie 11(c). $\big]$ **(2 Punkte)**

Abgabe bis zum 29.4.2011!