Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 29.4.2011

Sommersemester 2011

Mathematik II für NWI/Lineare Algebra

Übungszettel 4

Aufgabe 16: Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Trigonalisieren Sie die Matrix A.
Hinweis: Verwenden Sie das rekursive Verfahren, das im Beweis des Satzes über die Trigonalisierbarkeit verwendet wurde.

(b) Sei S eine Matrix, mit der A auf obere Dreiecksform gebracht werden kann. Ist S eindeutig bestimmt? Ist die obere Dreiecksform eindeutig festgelegt? (Begründung!) **(3+1 Punkte)**

Aufgabe 17: Die Matrix $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ist eine Matrix mit konstanten Zeilensummen und hat daher den Eigenvektor $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie alle Eigenwerte von A, ohne das charakteristische Polynom zu bestimmen. **(2 Punkte)**

(b) Sei $\langle x, y\rangle := x^T y$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $\langle Sx, Sy\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt, falls S orthogonal ist. Gilt $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$ auch für die oben angegebene Matrix A? **(2 Punkte)**

(c) Interpretieren Sie A geometrisch. *Hinweis:* Welche Rolle spielt u_1, was passiert mit Vektoren orthogonal zu u_1, was bedeutet (b). **(2 Punkte)**

Aufgabe 18: Sei $V = \ell_\infty$ der Vektorraum der beschränkten Folgen, d. h. $\ell_\infty := \{(x_i)_{i=1}^\infty \big| \max_{i\in\mathbb{N}} |x_i| < \infty\}$.

(a) Zeigen Sie: Auf ℓ_∞ ist durch $||x|| := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}|x_k|$ eine Norm definiert. **(2 Punkte)**

(b) Sei $e^{(n)} := \underset{\uparrow n\text{-te Stelle}}{(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)}$. Dann ist durch $(e^{(n)})_{n=1}^\infty$ eine Folge in ℓ_∞ definiert. Zeigen Sie, dass $(e^{(n)})_{n=1}^\infty$ gegen $0 = (0, \ldots 0, \ldots)$ konvergiert. **(1 Punkt)**

(c) Konvergiert die obige Folge $(e^{(n)})_{n=1}^\infty$ auch in der Maximumsnorm? **(1 Punkt)**

(d) Sind die beiden Normen äquivalent, d. h. lassen sich Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ finden, sodaß $||x||_\infty \leq c_1||x||$ und $||x|| \leq c_2||x||_\infty$ für alle $x \in \ell_\infty$ gilt? **(1 Punkt)**

(bitte wenden)

Aufgabe 19: Sei V der Vektorraum der reellen Polynome auf $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle p, q\rangle := \int_0^\infty e^{-x} p(x) q(x) dx$$

ein inneres Produkt auf V definiert ist. **(2 Punkte)**

(b) Sei P_n das Monom $P_n(x) = x^n$. Berechnen Sie $\langle P_n, P_m\rangle$. **(2 Punkte)**

(c) Geben Sie Polynome an, die auf $P_0(x) \equiv 1$ orthogonal stehen. **(1 Punkt)**

Abgabe bis zum 06.5.2011!