Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 6.5.2011

Sommersemester 2011

Mathematik II für NWI/Lineare Algebra

Übungszettel 5

Aufgabe 20: Sei V ein unitärer Vektorraum. Seien $x_1, \ldots, x_k$ paarweise orthogonale Vektoren mit $x_i \neq 0 \ \forall\ i \in \{1, \ldots, k\}$.
Zeigen Sie

(a) $x_1, \ldots, x_k$ sind linear unabhängig.
[Hinweis: Bilden Sie geeignete innere Produkte].

(b) $y = x - \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\langle x_i, x\rangle}{\langle x_i, x_i\rangle} x_i$ ist orthogonal auf alle x_j.

(c) Es gilt $x - \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\langle x_i, x\rangle}{\langle x_i, x_i\rangle} x_i = 0$ genau dann, wenn x und $x_1, \ldots, x_k$ linear abhängig sind.

(1+1+2 Punkte)

Aufgabe 21: Sei V ein euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) $\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2 = 4\langle x, y\rangle$

(b) $\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2$

Gelten diese Gleichungen auch in einem unitären Vektorraum? **(1+1+1 Punkte)**

(c)* Wird jede Norm von einem Skalarprodukt erzeugt, d. h. existiert zu jeder Norm $||\cdot||$ ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, sodass $||x|| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ für alle $x \in V$ gilt?
[Hinweis: (a) gibt an, wie man das innere Produkt definieren könnte und (b) gibt eine Eigenschaft an, die erfüllt sein muss. Betrachten Sie die Maximumsnorm oder die 1-Norm auf $\mathbb{C}^n$.] **(2 Zusatzpunkte)**

Aufgabe 22: Sei $V = C^\infty[0, 1]$ und U der Unterraum der Polynome vom Grad höchstens 2, d. h. $U = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Sei $\langle f, g\rangle := \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$. Berechnen Sie eine ONB von U, indem Sie das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf die Basis $\{1, x, x^2\}$ von U anwenden. **(3 Punkte)**

Aufgabe 23: Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und U eine beliebige Teilmenge von V.

(a) Zeigen Sie, dass $U^\perp := \{x \mid \langle x, y\rangle = 0 \ \forall\ y \in U\}$ ein Teilraum von V ist.

(b) Sei $V = \mathbb{R}^3$. Seien $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Berechnen Sie $U_1^\perp$ und $U_2^\perp$ und diskutieren Sie das Ergebnis.

(c) Sei V endlich-dimensional. Warum kann $(U^\perp)^\perp = U$ nur dann gelten, wenn U ein Unterraum von V ist? **(2+2+1 Punkte)**

Abgabe bis zum 13.5.2011!