

Sommersemester 2011

Mathematik II für NWI/Lineare Algebra/Analysis

Übungszettel 6

Aufgabe 24: Finden Sie eine duale Basis der Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ **(2 Punkte)**

Aufgabe 25: Sei V ein euklidischer/unitärer Vektorraum und $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis. Zeigen Sie, dass für $x, y \in V$ gilt:

$$(a) \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{\langle b_i, x \rangle} \langle b_i, y \rangle$$

$$(b) \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle b_i, x \rangle|^2$$

Gelten die obigen Formeln auch, wenn $\{b_1, \dots, b_n\}$ keine Orthonormalbasis ist? Wenn ja, warum? Wenn nein, wie muss man die Formeln modifizieren?

(1+1+1 Punkte)

Aufgabe 26: Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern sie existieren (mit Begründung!).

$$(a) (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } v_n = \begin{pmatrix} (-1)^n \frac{n+1}{n} \\ (-1)^n \frac{2n^2-1}{n^2+1} \end{pmatrix}.$$

$$(b) (\langle w, v_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } v_n \text{ aus (a)}$$

$$(c) (A^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Falls es in (a) - (c) eine nichtkonvergente Folge gibt, suchen Sie sich eine davon aus. Besitzt sie eine konvergente Teilfolge? **(1+1+1+1 Punkte)**

Aufgabe 27: Sei $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$$(a) \text{ Zeigen Sie } A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{n}{2^{n-1}} \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} \text{ für } n \geq 0.$$

Berechnen Sie

$$(b) \exp(A)$$

$$(c) \cosh(A)$$

$$(d) \sinh(A)$$

$$(e)^* \text{ Gilt } \cosh(A)^2 - \sinh(A)^2 = E_2?$$

2+2+2+1 Punkte)**(1 Zusatzpunkt)**

(bitte wenden)

Aufgabe 28: Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$. Berechnen Sie $f(A)$ für $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2 Punkte)

Abgabe bis zum 20.5.2011!