Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 20.5.2011

Sommersemester 2011

Mathematik II für NWI/Analysis

Übungszettel 7

Aufgabe 29: Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Zeigen Sie, dass $f(S^{-1}AS) = S^{-1}f(A)S$ gilt. **(2 Punkte)**

Aufgabe 30: Vektor- versus Matrixnorm.

(a) Wir betrachten zunächst die $\|.\|_1$-Norm, also $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die zugehörige Matrixnorm $|||A|||$ die Spaltensummennorm ist, also
$|||A||| = \|A\|_1 := \max_{1 \le k \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{jk}|$

<u>Hinweis:</u> Zeigen Sie zunächst, dass $\|Ax\|_1 \le \|A\|_1 \cdot \|x\|_1$, also $\|A\|_1$ eine obere Schranke für die Matrixnorm $|||A|||$ ist (warum folgt das?).

Zeigen Sie dann mittels der kanonischen Basisvektoren, dass auch $\|A\|_1 \le |||A|||$ gelten muss.

(b) Bestimmen Sie analog die Matrixnorm zur Vektornorm $\|.\|_\infty$ im $\mathbb{R}^n$.
<u>Hinweis:</u> Die Zeilensummennorm $\|\cdot\|_\infty$ ist durch $\|A\|_\infty := \max_{1 \le k \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$ definiert. Verwenden Sie an geeigneter Stelle den Vektor

$$b_k = (b_{1k}, \dots, b_{nk})^T \text{ mit } b_{ik} = \begin{cases} \frac{|a_{ki}|}{a_{ki}}, & \text{falls } a_{ki} \neq 0 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(3+2 Punkte)

Aufgabe 31: Seien

$$Q_a(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \max |y_i - x_i| < a\} \text{ und}$$
$$R_a(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \max |y_i - x_i| \le a\}$$

mit $a > 0$.

(a) Skizzieren Sie diese Mengen und entscheiden Sie, ob die Mengen offen oder abgeschlossen sind.

(b) Bestimmen Sie $\overline{Q_a(x)}$ und $\overline{R_a(x)}$.

(c) Sei $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1 \in (-1, 1) \right\}$ und $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1 \in [-1, 1] \right\}$. Skizzieren Sie die Mengen

$$\bigcup_{x \in U_1} Q_1(x), \quad \bigcup_{x \in U_2} Q_1(x), \quad \bigcup_{x \in U_1} R_1(x), \quad \bigcup_{x \in U_2} R_1(x)$$

und entscheiden Sie, ob die Mengen offen oder abgeschlossen sind. Interpretieren Sie das Ergebnis. (<u>Hinweis:</u> Satz 6.17) **(1+1+3 Punkte)**

(bitte wenden)

Aufgabe 32* Ein Punkt $c \in \mathbb{R}^d$ heißt Adhärenzpunkt von $D \subseteq \mathbb{R}^d$, falls $D \cap B_\varepsilon(c) \neq \emptyset$ für alle $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) c ist Adhärenzpunkt von D.

(b) Es existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

(c) c ist Häufungspunkt einer Folge aus D. **(3 Zusatzpunkte)**

Aufgabe 33 Suchen Sie sich eine der Matrixnormen aus (Aufgabe 30) aus.

(a) Bestimmen Sie die Matrixnorm von $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Berechnen Sie $f(xA)$ und $f(xB)$. Für welches $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die Reihen? Gibt es einen Zusammenhang mit $||xA||$ und $||xB||$?

(c) Sind $g(x) := f(xA)$ und $h(x) := f(xB)$ stetig?

(1+3+2 Punkte)

Abgabe bis zum 27.5.2011!