

Sommersemester 2011

Mathematik II für NWI/Analysis

Übungszettel 8

Aufgabe 34: Finden Sie die allgemeine Lösung der Gleichung

$$y'(x) = ay(x) + e^{bx}$$

für beliebiges $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.**(3 Punkte)****Aufgabe 35:** Lösen Sie die Anfangswertprobleme

(a) $y' = y^{\frac{2}{3}} \quad y(0) = 1$

(b) $y' = y^{\frac{2}{3}} \quad y(0) = 0$.

Sind die Lösungen eindeutig? Wenn nein, geben Sie alle Lösungen an und skizzieren Sie diese.

(3+2 Punkte)**Aufgabe 36:** Aus einem havarierten Kernkraftwerk sei der radioaktive Stoff A in die Umwelt gelangt. Stoff A zerfalle mit der Zerfallskonstanten $\lambda > 0$ in Stoff B, der ebenfalls radioaktiv ist. B zerfalle mit der Zerfallskonstanten $0 < \mu \neq \lambda$. Das zugehörige Gleichungssystem lautet:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ \lambda & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $x(0) = x_0 > 0$, $y(0) = 0$, und skizzieren Sie $y(t)$. Wann ist $y(t)$ maximal?**(4 Punkte)****Aufgabe 37:** Sei $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$.(a) Zeigen Sie $f([1, \infty)) \subseteq [1, \infty)$ Hinweis: Was ist das Minimum von f auf $[1, \infty)$?(b) Zeigen Sie, dass f eine Kontraktion ist.Hinweis: Die Lipschitzkonstante ist das Supremum (Maximum?) von $|f'|$ auf $[1, \infty)$.(c) Lösen Sie $f(x) = x$ und diskutieren Sie, ob man die Lösungen mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes bestimmen kann.(d) Bestimmen Sie die (eine?) Lösung näherungsweise mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes, d.h. berechnen Sie so viele Folgenglieder $x_n = f^n(x_0)$, dass IhrE TutorIn zufrieden ist (auf 7 Nachkommastellen genau). Verwenden Sie als Startwert ein Milionstel Ihrer Matrikelnummer.**(1+1+1+1 Punkte)****Abgabe bis zum 03.6.2011!**