Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 03.6.2011

Sommersemester 2011

# Mathematik II für NWI/Analysis

## Übungszettel 9

**Aufgabe 38:** Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' + 3x^2y - 6x^2 = 0$ mit $y(0) = 1$. Für welche $x$ ist die Lösung wohldefiniert?

Hinweis: Lösen Sie zunächst die homogene Gleichung $y' + 3x^2y = 0$ (Variablentrennung). Bestimmen Sie dann eine spezielle Lösung (mit Variation der Konstanten). Bilden Sie nun die allgemeine Lösung der Gleichung und legen Sie schließlich die Konstante darin durch die Anfangsbedingung fest. **(4 Punkte)**

**Aufgabe 39:** Betrachten Sie die Differentialgleichung $\ddot{u} - 2a\dot{u} + a^2u = 0$.

(a) Weisen Sie nach, dass sowohl $e^{at}$ als auch $te^{at}$ Lösungen der Differentialgleichung sind.

(b) Sind die Lösungen aus (a) linear unabhängig? Begründung!

(c) Lösen Sie nun das Anfangswertproblem mit $u(0) = 0$ und $\dot{u}(0) = 1$.

(d) Skizzieren Sie die Lösung. **(1+1+1+1 Punkte)**

**Aufgabe 40:** Betrachten Sie nun $\ddot{u} - 4\dot{u} - 5u = 0$.

(a) Was sind die Lösungen?
Skizzieren Sie sie.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $u_p$ der inhomogenen Gleichung
$\ddot{u} - 4\dot{u} - 5u = t$.
Hinweis: Setzen Sie für $u_p$ ein Polynom 1. Ordnung in $t$ an.

(c) Was ist jetzt die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung?

**(2+2+1 Punkte)**

**Aufgabe 41:** (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = A(t)x$ mit

$$A(t) = t\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**(4 Punkte)**

(b)* Bestimmen Sie nun eine Partikulärlösung der inhomogenen Differentialgleichung $\dot{x} = A(t)x + v$ mit $v = (1,1)^T$. **(1 Bonuspunkt)**

**Aufgabe 42*:** Sei $\ddot{x} = g(x)$ und $G$ eine Stammfunktion von $g$. Sei $x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung.

(a) Zeigen Sie, dass $x$ die Differentialgleichung $\frac{\dot{x}^2}{2} = G(x) + c$ mit $c = \frac{\dot{x}^2}{2}(t_0) - G(x(t_0))$ erfüllt. Hinweis: Ableiten

(b) Lösen Sie $\ddot{x} = -\frac{1}{2x|x|}$ mit $x(0) = 1, \dot{x}(0) = -1$. Für welche $t$ existiert die Lösung? Ist sie für alle $t$ sinnvoll? Hinweis: $x(t)$ muss in einer Umgebung von $t = 0$ positiv sein (warum?). Lösen Sie daher einfach $\ddot{x} = -\frac{1}{2x^2}$.

(c) Interpretieren Sie (a) und (b). Hinweis: Physik (Mechanik); die Kraft $-\frac{1}{x|x|}$ lässt sich auch so schreiben: $-\frac{1}{x|x|} = -\frac{x}{|x|^3} = -\frac{1}{|x|^2}\frac{x}{|x|}$ schreiben. **(1+1+1 Bonuspunkte)**

**Abgabe bis zum 10.6.2011!**