Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 08.7.2011

Sommersemester 2011

Mathematik II für NWI/Lineare Algebra

Freiwillige Aufgaben zur Klausurvorbereitung

Aufgaben zu Projektionen

Aufgabe 61: Sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V und $\{b_1^*, \ldots, b_n^*\}$ die duale Basis.

(a) Zeigen Sie, dass $p_k(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle b_i^*, x\rangle b_i$ eine Projektion ist.

(b) Berechnen Sie $p_k \circ p_\ell$.

(c) $q_\ell(x) = \sum_{i=\ell}^{n} \langle b_i^*, x\rangle b_i$ ist ebenfalls eine Projektion.
Für welche Werte von k und ℓ gilt $p_k \circ q_\ell = 0$?
Für welche Werte von k und ℓ ist $p_k + q_\ell$ eine Projektion?

Aufgabe 62: Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ aus Aufgabe 59.

(a) Berechnen Sie für die beiden Eigenwerte λ_1 und λ_2 die entsprechenden Projektionsmatrizen P_{λ_1} und P_{λ_2}.

(b) Rechnen Sie nach, dass tatsächlich

$$A = \lambda_1 P_{\lambda_1} + \lambda_2 P_{\lambda_2} \quad \text{und} \quad E_2 = P_{\lambda_1} + P_{\lambda_2}$$

gilt.

(c) Berechnen Sie A^{-2}.

(d) Berechnen Sie nochmals $A^{\frac{1}{2}}$ und $\ln A$.

Aufgabe 63: Sei $V = C^0(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $p : V \to V, p(u) := \frac{1}{2}(u - \tilde{u})$ eine Projektion ist, wobei $\tilde{u}$ durch $\tilde{u}(x) := u(-x)$ für $u \in V$ definiert ist.

ausgewählte Klausuraufgaben aus dem Vorjahr

Aufgabe Kl-1: (a) Berechnen Sie das Integral $\int_1^3 \int_{-1}^1 xy(x+3y)^2 \, dx \, dy$.

Aufgabe Kl-3: Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' + 2y = e^{-x} \quad \text{mit} \quad y(0) = 1.$$

Aufgabe Kl-5: (a) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt den Eigenwert $\lambda_1 = 2$. Berechnen Sie einen dazugehörigen Eigenvektor.

(bitte wenden)

Aufgabe Kl-6: Die Matrix A besitze die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$, sowie die entsprechenden Eigenvektoren $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

(a) A kann offensichtlich auf Diagonalform $D = S^{-1}AS$ gebracht werden. Wie lauten D und S?

(b) Wie lautet A?

(c) Berechnen Sie die Matrix $\cos(\pi A)$.