Sommersemester 2012

Diskrete Geometrie I**Übungszettel 1****Aufgabe 1:** Sind die folgenden Mengen diskret/lokal endlich?

- (a) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- (b) $\{a + \alpha b \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$, wobei $\alpha \in \mathbb{Q}$. Was lässt sich sagen, wenn $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt?
- (c) $\{a + \alpha b \mid \alpha a - b \in [\beta, \gamma] \text{ und } a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$ und $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\beta < \gamma$.

Aufgabe 2: Beantworten Sie die folgenden Fragen (mit Beweis):

- (a) Ist jede Teilmenge einer diskreten Menge diskret?
- (b) Ist die Vereinigung zweier diskreter Mengen diskret?
- (c) Ist die Vereinigung zweier lokal endlicher Mengen lokal endlich?

Aufgabe 3: Finden Sie einen metrischen Raum (M, d) und eine lokal endliche Menge S mit der Eigenschaft, dass es eine Kugel $U_r(x)$ gibt, die unendlich viele Punkte von S enthält.**Aufgabe 4:** Zeigen Sie: In einem metrischen Raum (M, d) sind bezüglich einer Gruppe G von Isometrien die folgenden Aussagen äquivalent.

- (a) Für alle $x, y \in M$ und alle $r > 0$ ist die Menge $U_r(y) \cap G(x)$ endlich.
- (b) Für alle $x \in M$ und alle $r > 0$ ist die Menge $U_r(x) \cap G(x)$ endlich.
- (c) Es gibt ein Element $y \in M$ so, dass für alle $x \in M$ und alle $r > 0$ die Menge $U_r(y) \cap G(x)$ endlich ist.
- (d) Für alle $x \in M$ gibt es ein $y \in M$ so, dass für alle $r > 0$ die Menge $U_r(y) \cap G(x)$ endlich ist.

Gilt die obige Äquivalenz auch noch, wenn man anstatt einer Gruppe von Isometrien eine Gruppe beliebiger Transformationen zugrunde legt?

Hinweis: Zeigen Sie $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$. Überlegen Sie sich, dass zu jedem $U_r(x)$ und y ein $s \in \mathbb{R}$ existiert mit $U_r(x) \subseteq U_s(y)$.

Abgabe bis zum 10.4.2012, 12:15 Uhr!