Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 17.4.2012

Sommersemester 2012

Diskrete Geometrie I

Übungszettel 2

Aufgabe 5: Eine Isometrie $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt Spiegelung, wenn die Menge aller invarianten Punkte $\alpha(x) = x$ eine $(n-1)$-dimensionale Hyperebene ist. Zeigen Sie:

(a) $\alpha(x) = Rx + t$ ist genau dann eine Spiegelung, wenn $R \in O(n)$ nur die Eigenwerte ± 1 besitzt, wobei die Vielfachheit des Eigenwerts 1 genau $n-1$ beträgt, und t ein Eigenvektor zum Eigenwert -1 ist.

(b) Durch $\alpha(x) = x - 2\frac{\langle a,x\rangle}{||a||^2} \cdot a + b, a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, b \in \mathbb{R}^n$ ist eine Spiegelung definiert, falls a und b linear abhängig sind.

(c) Jede Spiegelung α lässt sich in der Form $\alpha(x) = x - 2\frac{\langle a,x\rangle}{||a||^2} \cdot a + ca$ mit $a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und $c \in \mathbb{R}$ darstellen.

(d) Jede Translation lässt sich als Produkt zweier Spiegelungen schreiben.

(e) Jede Isometrie in $\mathbb{R}^n$ kann als Produkt von höchstens $n+1$ Spiegelungen dargestellt werden.

(f) Jede Gleitspiegelung ist ein Produkt von drei Spiegelungen.

(2+1+1+1+1+1 Punkte)

Aufgabe 6: Bestimmen Sie alle diskreten Untergruppen der $E(1)$.

(3 Punkte)

Aufgabe 7: Sei $P_u(G) := \{\alpha \in G \mid \alpha(u) = u\}, \quad u \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

(a) $P_u(G) \cap P_v(G) \subseteq P_{au+bv}(G)$ für alle $u, v, \in \mathbb{R}^n, a, b \in \mathbb{R}$ mit $a + b = 1$.

(b) Seien $u_1, \cdots u_n \in \mathbb{R}$ linear unabhängig. Dann gilt $P_{u_1}(G) \cap \cdots \cap P_{u_n}(G) \cap P_0(G) = \{e\}$.

(c) Ist G diskret, so ist $P_u(G)$ endlich.

(3 Punkte)

Abgabe bis zum 24.4.2012, 12:15 Uhr!