Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 25.4.2012

Sommersemester 2012

Diskrete Geometrie I

Übungszettel 3

Aufgabe 8: Sei $e \in \mathbb{R}^3$ und $R \in SO(3)$ eine Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{6}$. Betrachten Sie die folgenden (diskreten) Gruppen:

$G_1 = \langle (e, E), (0, R) \rangle$
$G_2 = \langle (e, E), (\frac{e}{6}, R) \rangle$
$G_3 = \langle (e, E), (\frac{e}{2}, R) \rangle$
$G_4 = \langle (e, E), (e, R) \rangle$
$G_5 = \langle (e, E), (-\frac{e}{6}, R) \rangle$

Welche dieser Gruppen lassen sich als halbdirektes Produkt $T(G) \rtimes P(G)$ darstellen? Welche Gruppen sind kongruent bzw. äquivalent? **(4 Punkte)**

Aufgabe 9: Bestimmen Sie alle diskreten Gruppen $G \subseteq E(3)$, für die $T(G) = \{(ne_3, E) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ gilt. **(4 Punkte)**

Aufgabe 10: Definieren Sie ein Polygon mit $n \geq 3$ Ecken wie folgt: Wählen Sie n verschiedene Punkte $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^2$ so, dass drei aufeinander folgende Punkte nicht auf einer Geraden liegen. Definieren Sie $P(v_1, \ldots, v_n)$ als Vereinigung der Kanten $\{\lambda v_i + (1-\lambda)v_{i+1} \mid \lambda \in [0, 1]\}$, $i = 1, \ldots, n$ wobei $v_{n+1} := v_1$.

(a) Zeigen Sie, dass die Symmetriegruppe eines Polygons eine Rosettengruppe ist.

Intuitiv ist klar, was ein regelmäßiges (reguläres) Polygon ist. Finden Sie eine geeignete Definition so, dass die folgende Aussage nicht trivial ist, und beweisen Sie diese:

(b) Ein Polygon P mit $n \geq 3$ Ecken ist genau dann regelmäßig, wenn seine Symmetriegruppe die Rosettengruppe D_n ist.

Zeigen Sie weiter:

(c) Die Symmetriegruppe eines Polygons mit n Ecken ist eine Untergruppe der Rosettengruppe D_n, also eine Rosettengruppe C_k oder D_k, wobei k ein Teiler von n ist.

(d) Wie viele regelmäßige Polygone mit n Ecken gibt es (bis auf Ähnlichkeit)?
Hinweis: Drücken Sie das Ergebnis durch die Eulersche φ-Funktion aus.

(e) Gibt es zu jedem echten Teiler k von $n > 2$ ein Polygon mit n Ecken, dessen Symmetriegruppe eine Rosettengruppe C_k oder D_k ist?
Hinweis: Untersuchen Sie speziell die Fälle $n = 4$ und $n = 5$.

(1+2+1+1+2 Punkte)

Abgabe bis zum 08.5.2012, 12:15 Uhr!