Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 31.5.2012

Sommersemester 2012

Diskrete Geometrie I

Übungszettel 5

Aufgabe 13: Beweisen Sie, dass die im Beweis von Lemma 5.18 definierte Menge

$$FD := \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mid -\frac{h_i}{2} < x_i \leq \frac{h_i}{2} \right\}$$

tatsächlich Fundamentalbereich des dort betrachteten Gitters Γ ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 14: Zeigen Sie: Die Voronoizelle eines Gitters Γ ist ein Polyeder, insbesondere ist sie der Schnitt von endlich vielen Halbräumen $H_v = \{x \in V | < x, v > \leq \frac{1}{2} < v, v >\}$ mit $v \in \Gamma$.

(2 Punkte)

Aufgabe 15:

(a) Sei $\Gamma = \mathbb{Z}^3 \cup (v + \mathbb{Z}^3)$, wobei $v := (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Bestimmen Sie das duale Gitter von Γ.

(b) Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ das von $(1, 0)$ und $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ aufgespannte Gitter (das sog. "Dreiecksgitter"). Bestimmen Sie die Voronoizelle von Γ.

(1+1 Punkte)

Aufgabe 16: Sei Γ ein primitives Rechteckgitter mit $P(\Gamma) = \{E, I, m_x, m_y\}$. Sei $v(E) = 0, v(I) = 0$ und $v(m_x) = v(m_y) = \frac{t}{2}, t \in \Gamma$. Zeigen Sie, dass

$$v(R) + Rv(S) - v(RS) \in \Gamma$$

für alle $R, S \in P(\Gamma)$ gilt. **(2 Punkte)**

Aufgabe 17: Sei $G = \{(t + v(R), R) | t \in \Gamma, R \in P\}$ eine Raumgruppe. Zeigen Sie:

(a) $G' := \{(t + v'(R), R) | t \in \Gamma, R \in P\}$, wobei $v'(R) = v(R) + w - Rw$, ist äquivalent zu G.

(b) G ist genau dann symmorph, wenn ein $w \in \mathbb{R}^n$ so existiert, dass $v(R) = w - Rw$ gewählt werden kann.

(1+3 Punkte)

Abgabe bis zum 12.6.2012, 12:15 Uhr!