Universität Bielefeld
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 20.6.2012

Sommersemester 2012

Diskrete Geometrie I

Übungszettel 6

Aufgabe 18: Sei $\Gamma_1 = \langle v_1, v_2\rangle_{\mathbb{Z}}, \Gamma_2 = \langle v_1, v_3\rangle_{\mathbb{Z}}$ und $\Gamma_3 = \langle v_1, v_4\rangle_{\mathbb{Z}}$ mit

$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \sqrt{b^2-\frac{1}{4}}\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}a\\ \sqrt{1-a^2}\end{pmatrix}$ mit $0 < a < \frac{1}{2}, b > 1$.

Zeigen Sie:

(a) Die Punktgruppe $P(\Gamma)$ ist in allen drei Fällen isomorph zu D_2.

(b) Die Gitter Γ_1 und Γ_2 sind nicht äquivalent.

(c) Die Gitter Γ_2 und Γ_3 sind äquivalent.

(d) Sind die Gitter Γ_1 und Γ_3 äquivalent? **(3+2+1+1 Punkte)**

Aufgabe 19: Sei G_1 eine Raumgruppe vom Typ $p3m1$ und G_2 eine Raumgruppe vom Typ $p31m$. Geben Sie für beide Gruppen eine Präsentation an, d. h. eine Menge von erzeugenden Elementen und dazugehörigen Relationen. **(4 Punkte)**

Aufgabe 20: Sei $P \subseteq SO(3)$ endlich und sei $\{x_i \mid i \in \{1, \cdots, h\}\}$ ein Repräsentantensystem der Pole von P. Sei $m_i = |P_{x_i}|$. Zeigen Sie, dass für $h = 3$ gilt:

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} > 1$$

und bestimmen Sie alle Lösungen dieser Ungleichung. *Hinweis:* Beachte $m_i \geq 2$.

(3 Punkte)

Abgabe bis zum 29.6.2012, 12:15 Uhr!