

Sommersemester 2013

Analytische Zahlentheorie**Übungszettel 1**

Aufgabe 1: Wir betrachten zwei Oktaeder als Spielwürfel, zunächst seien beide Oktaeder mit den Ziffern 1-8 beschriftet. Welche alternativen, äquivalenten Beschriftungen mit natürlichen Zahlen gibt es für das Oktaederpaar? **(3 Punkte)**

Aufgabe 2: Wir betrachten die Rekursion $c_{n+1} = 2c_n + c_{n-1}$ für $n \geq 1$ mit den Startwerten $c_0 = 1$ und $c_1 = 2$.

- (a) Bestimmen Sie eine explizite Formel für c_n .
- (b) Betrachten Sie die Folge $a_n := \frac{c_{n+1}}{c_n}$ (falls definiert) und bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, falls dieser existiert.
- (c) Betrachten Sie nun die Rekursion rückwärts, also $c_{n-1} = -2c_n + c_{n+1}$ für $n \leq 0$. Bestimmen Sie eine Formel für c_n für negative n . Gibt es einen Zusammenhang zwischen c_{-n} und c_n ? Gibt es einen Zusammenhang zwischen $\lim_{n \rightarrow -\infty} a_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$? **(3+1+2 Punkte)**

Aufgabe 3: Wir betrachten die Rekursion $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$ für $n \geq 1$ mit den Startwerten $b_0 = \alpha$ und $b_1 = \beta$. Bestimmen Sie eine explizite Formel für b_n mit Hilfe der linearen Algebra, d.h. schreiben Sie die Rekursion in der Form

$$\begin{pmatrix} b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{mit der Matrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie dann A^n (diagonalisieren Sie dazu A). **(3 Punkte)**

Aufgabe 4: (a) Zeigen Sie: Ist $2^k - 1$ eine Primzahl, so ist k eine Primzahl.

(b) Betrachten Sie die Teilerfunktion $\sigma(n) = \sigma_1(n)$. Bestimmen Sie $\sigma(n)$ für

- i. $n = p^k$, wobei p eine Primzahl ist und $k \in \mathbb{N}_0$,
- ii. $n = 2^k m$, wobei m eine ungerade Zahl ist,
- iii. $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, wobei $2^p - 1$ eine Primzahl sei.

(c) Zeigen Sie, dass eine gerade Zahl n genau dann eine vollkommene Zahl ist, wenn sie von der Form $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ ist, wobei p und $2^p - 1$ Primzahlen sind.

(1+1+2 Punkte)

Abgabe bis zum 15.04.2013!