Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 25.06.2013

Sommersemester 2013

Analytische Zahlentheorie

Übungszettel 12

Aufgabe 41: Betrachten Sie den Integrallogarithmus

$$\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t} \qquad \text{für } x \geq 2.$$

(a) Zeigen Sie

$$\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} - \frac{2}{\log 2}.$$

(b) Beweisen Sie

$$\mathrm{Li}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} k! \frac{x}{(\log x)^{k+1}} + n! \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^{n+1}} + C_n$$

für eine geeignete Konstante C_n.

(c) Zeigen Sie

$$\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^n} = O\left(\frac{x}{(\log x)^n}\right).$$

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 42: Zeigen Sie: Sei $f(z)$ holomorph für $|z| \leq R$ mit $f(0) = 0$ und $A := \max_{|z|\leq R} \mathrm{Re}(f(z))$. Dann gilt für $0 < r < R$:

$$\max_{|z|\leq r} |f(z)| \leq \frac{2Ar}{R-r}.$$

(2 Punkte)

Aufgabe 43: (a) Sei $f(x) \geq 0$ eine monoton fallende Funktion und $m, n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie

$$\int_m^n (x - [x]) f(x)\, dx \leq \frac{1}{2} \int_m^n f(x)\, dx.$$

(b) Zeigen Sie für $s = \sigma + it$ mit $0 < \sigma < 1$ und $N \in \mathbb{N}$:

$$|\zeta(s)| \leq N^{1-\sigma} \left(\frac{1}{1-\sigma} + \frac{1}{|s-1|} + \frac{|s|}{2\sigma N} \right).$$

(c) Zeigen Sie für $\alpha > 0$ und $\sigma \geq \alpha$:

$$|\zeta(s)| \leq N^{1-\alpha} \left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{|t|} + \frac{1}{2} + \frac{|t|}{2\alpha N} \right).$$

(2+3+2 Punkte)

Aufgabe 44: Zeigen Sie: Für jedes $c > 0$ existiert eine Konstante $C = C(c) > 0$, sodass für alle $|t| \geq 2$, $\sigma \geq 1 - \frac{c}{\log |t|}$ gilt:

$$|\zeta(s)| \leq C \log |t|.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Formel $|\zeta(s)| \leq C_\alpha |t|^{1-\alpha}$ aus der Vorlesung. **(2 Punkte)**

Abgabe bis zum 01.07.2013!