Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 15.04.2013

Sommersemester 2013

Analytische Zahlentheorie

Übungszettel 2

Aufgabe 5: Seien f und g arithmetische Funktionen. Zeigen Sie:

(a) Sind f und g multiplikativ, dann ist auch $f * g$ multiplikativ.

(b) Sind f und $f * g$ multiplikativ, dann ist g multiplikativ.

(c) Ist f multiplikativ, dann ist auch f^{-1} multiplikativ.

(d) Sei $f \cdot g$ definiert durch $(f \cdot g)(\mathrm{n}){:=}f(n)g(n)$. Untersuchen Sie die Eigenschaften von $f \cdot g$ in Abhängigkeit derer von f und g. **(1+1+1+1 Punkte)**

Aufgabe 6: Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen (vollständig) multiplikativ sind:

(a) $\sigma_k(n)$

(b) die Liouville-Funktion λ, definiert durch

$$\lambda(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^{\ell_1 + \ldots + \ell_r}, & \text{falls } n = p_1^{\ell_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\ell_r}. \end{cases}$$

(c) $2^{\nu(n)}$, wobei $\nu(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von n ist.

(1+1+1 Punkte)

Aufgabe 7: Sei φ die Euler–Funktion. Zeigen Sie:

(a) $\varphi(n) = n \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p})$. (Hinweis: Verwenden Sie die Multiplikativität von φ und die Formel $\varphi = \mu * N$.)

(b) $\prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p}) = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$.

(c) Es gilt: $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)\frac{d}{\varphi(d)}$ mit $d = \mathrm{ggT}(m, n)$.

(d) Wenn $m|n$, dann $\varphi(m)|\varphi(n)$.

(e) Bestimmen Sie alle ganzen Zahlen, so dass

- $\varphi(n) = 2$
- $\varphi(n) = 4$
- $\varphi(n) = \varphi(2n)$
- $\varphi(n) = \frac{n}{2}$. **(1+1+1+1+1 Punkte)**

Aufgabe 8: Berechnen Sie die (formalen) Dirichlet–Reihen und Euler–Produkte für folgende arithmetische Funktionen:

(a) die Liouville-Funktion λ, siehe Aufgabe 6.

(b) $2^{\nu(n)}$, wobei $\nu(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von n ist.

(c) $2^{\nu(n)}\lambda(n)$. **(1+1+1 Punkte)**

Abgabe bis zum 22.04.2013!