Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 23.04.2013

Sommersemester 2013

Analytische Zahlentheorie

Übungszettel 3

Aufgabe 9: Zeigen Sie

$$\sum_{n\le x} \frac{\log n}{n} = \frac{1}{2}\log^2(x) + A + O\left(\frac{\log x}{x}\right),$$

wobei A eine geeignete Konstante ist. **(2 Punkte)**

Aufgabe 10: Die Bernoulli–Polynome seien auf $[0,1]$ rekursiv definiert durch

$$b_0(x) = 1;$$

$$b_n'(x) = n b_{n-1}(x), \qquad n \ge 1;$$

$$\int_0^1 b_n(x)\,dx = 0, \qquad n \ge 1.$$

(a) Zeigen Sie $|b_n(x)| \le n!$ für alle $x \in [0,1]$.

(b) Zeigen Sie

$$F(x,t) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{te^{xt}}{e^t - 1},$$

und diskutieren Sie die Konvergenz.

(c) Zeigen Sie $b_n(1-x) = (-1)^n b_n(x)$.

(d) Berechnen Sie $b_n(x)$ für $n \le 4$.

(e) Sei $B_n = b_n(0)$ die n–te Bernoulli-Zahl. Zeigen Sie

- $B_1 = -\frac{1}{2}$
- $B_{2n+1} = 0$ für $n \ge 1$ **(1+2+1+1+1 Punkte)**

Aufgabe 11: Die Bernoulli-Funktionen B_n seien als periodische Fortsetzung der Bernoulli-Polynome auf $[0,1)$ definiert, d.h. $B_n(x) = b_n(\{x\})$, wobei $\{x\} = x - [x]$.

(a) Zeigen Sie die folgende Summationsformel (Euler–Maclaurin), wobei $f(x)$ als $(k+1)$–mal differenzierbar und $a, b \in \mathbb{Z}$ vorausgesetzt werde:

$$\sum_{a<n\le b} f(n) = \int_a^b f(t)dt + \sum_{\ell=0}^{k} \frac{(-1)^{\ell+1}B_{\ell+1}}{(\ell+1)!}\left(f^{(\ell)}(b) - f^{(\ell)}(a)\right) + \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\int_a^b B_{k+1}(t) f^{(k+1)}(t)dt.$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der obigen Formel für $n \ge 2$:

$$\sum_{k\le n} \frac{1}{k} = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + O(n^{-4}).$$

Leiten Sie gleichzeitig eine Formel für $\gamma := \lim_{n\to\infty} \sum_{k\le n} \frac{1}{k} - \log(n)$ ab.

(c) Vergleichen Sie für einige repräsentative n die exakten Werte für $\sum_{k\le n} \frac{1}{k}$ mit den Näherungswerten aus obiger Formel. **(3+3+1 Punkte)**

Abgabe bis zum 29.04.2013!