Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 30.04.2013

Sommersemester 2013

Analytische Zahlentheorie

Übungszettel 4

Aufgabe 12: Gegeben seien eine Funktion $F : [1,\infty) \to \mathbb{C}$ und arithmetische Funktionen a und b. Weiters sei eine Faltung $a \circ F$ definiert durch

$$a \circ F(x) = \sum_{n \le x} a(n) F\left(\frac{x}{n}\right).$$

(a) Zeigen Sie $a \circ (b \circ F) = (a * b) \circ F$, wobei $*$ wie üblich die Dirichlet-Faltung bezeichnet.

(b) Sei $G(x) = \sum_{n \le x} F\left(\frac{x}{n}\right)$. Zeigen Sie, dass dann $F(x) = \sum_{n \le x} \mu(n) G\left(\frac{x}{n}\right)$ gilt.

(c) Sei nun etwas allgemeiner $G(x) = \sum_{n \le x} a(n) F\left(\frac{x}{n}\right)$. Unter welcher Bedingung lässt sich diese Formel umkehren, d.h. unter welcher Bedingung lässt sich F als $F(x) = \sum_{n \le x} b(n) G\left(\frac{x}{n}\right)$ darstellen? **(2+1+1 Punkte)**

Aufgabe 13: Berechnen Sie $\zeta(2)$.

(Hinweis: Setzen Sie die für $0 \le x \le \pi$ definierte Funktion $f(x) = x(\pi - x)$ periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort und entwickeln Sie diese Funktion in eine Fourier-Reihe.) **(4 Punkte)**

Aufgabe 14: Zeigen Sie:

(a) Sei $0 < \alpha \ne 1$ mit $\gamma = \max(1, \alpha)$. Für $x \ge 1$ gilt:

$$\sum_{n \le x} \sigma_\alpha(n) = \frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + O(x^\gamma)$$

(b) Es gilt:

$$\sum_{n \le x} \sigma_{-\beta}(n) = \begin{cases} \zeta(\beta+1)\, x + O(x^\delta) & \text{für } 0 < \beta \ne 1, x \ge 1 \\ \zeta(2)\, x + O(\log x) & \text{für } \beta = 1, x > 1. \end{cases}$$

(2+3 Punkte)

Aufgabe 15: Sei $s > 1$ und $\{x\} := x - [x]$.

(a) Zeigen Sie, dass für $s > 1$ gilt:

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}\, dx;$$

(b) Leiten Sie hieraus ab, dass $\lim_{s \searrow 1} (s-1)\zeta(s) = 1$. **(2+1 Punkte)**

Abgabe bis zum 06.05.2013!