Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 14.05.2013

Sommersemester 2013

# Analytische Zahlentheorie

## Übungszettel 6

**Aufgabe 20:** Die Liouville-Funktion $\lambda$ ist definiert durch

$$\lambda(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^{\ell_1+\ldots+\ell_r}, & \text{falls } n = p_1^{\ell_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\ell_r}. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ eine Quadratzahl} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Bestimmen Sie die Abszisse der absoluten Konvergenz $\sigma_a$ für $D_\lambda(s)$ und zeigen Sie, dass $D_\lambda(s) = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$ für geeignete $s$ gilt. Für welche $s$ gilt diese Gleichung?

**(2+3 Punkte)**

**Aufgabe 21:** Beweisen Sie den folgenden Satz von Mertens: Es existiert eine Konstante $A$, sodass gilt:

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} = \log(\log x) + A + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

*Hinweis:* Verwenden Sie die Formel von Abel mit $a(p) = \frac{\log p}{p}$ für $p$ prim und $a(n) = 0$ sonst, und $f(t) = \frac{1}{\log t}$. Beachten Sie weiters $\sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1)$. **(4 Punkte)**

**Aufgabe 22:** Sei $f$ eine arithmetische Funktion. Es existiere ein $M \in \mathbb{R}$ und ein $s_0 = \sigma_0 + it$, sodass $\left|\sum_{n \le x} f(n) n^{-s_0}\right| \le M$ für alle $x \ge 1$ gilt. Zeigen Sie, dass für alle $0 < a \le b$ und alle $s$ mit $\sigma > \sigma_0$ gilt:

$$\left|\sum_{a < n \le b} f(n) n^{-s}\right| \le 2M\, a^{\sigma_0 - \sigma} \left(1 + \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0}\right).$$

*Hinweis:* Verwenden Sie wieder einmal die Formel von Abel. **(3 Punkte)**

**Aufgabe 23:** (a) Beweisen Sie

$$\sum_{\substack{m,n \ge 1 \\ (m,n)=1}} \frac{1}{m^2 n^2} = \frac{\zeta^2(2)}{\zeta(4)}.$$

(b) Drücken Sie die Summe

$$\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_n \ge 1 \\ (m_1,\ldots,m_n)=1}} \frac{1}{m_1^{s_1} \cdots m_n^{s_n}}$$

durch $\zeta$–Funktionen aus, unter der Voraussetzung, dass $\mathrm{Re}(s_j) > 1$ für alle $1 \le j \le n$.

**(2+2 Punkte)**

**Abgabe bis zum 21.05.2013!**