Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 21.05.2013

Sommersemester 2013

Analytische Zahlentheorie

Übungszettel 7

Aufgabe 24: Sei $D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$, wobei $f(n)$ eine vollständig multiplikative Funktion sei. Sei f^{-1} die Dirichlet-Inverse von f und $D_{f^{-1}}(s)$ die entsprechende Dirichlet-Reihe.

(a) Zeigen Sie, dass $D_f(s)$ und $D_{f^{-1}}(s)$ die gleiche Abszisse der absoluten Konvergenz besitzen.

(b) Beweisen Sie, dass für $\sigma > \sigma_a$ gilt:

$$\frac{D_f'(s)}{D_f(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\Lambda(n)}{n^s}.$$

(1+3 Punkte)

Aufgabe 25: (a) Sei $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ eine Dirichlet–Reihe mit $f(n) \geq 0$ und $\sigma_a < \infty$. Zeigen Sie, dass dann auch $G(s) = e^{F(s)}$ eine Dirichlet–Reihe zu einer arithmetischen Funktion $g(n)$ mit nur nicht–negativen Werten ist. Was kann man über die Abszisse der absoluten Konvergenz von $G(s)$ aussagen?

(b) Zeigen Sie, dass unter den Voraussetzungen von (25a) gilt: $g(n) > 0$ für alle $n \in N$ genau dann, wenn $f(p) > 0$ für alle Primzahlen p.

(c) Diskutieren Sie: Ist die Bedingung $f(n) \geq 0$ für alle n in (25a) notwendig? (Beweis oder Gegenbeispiel!) Kann die Bedingung abgeschwächt werden (wenn ja, wie?) oder ganz fallen gelassen werden? Was gilt für vollständig multiplikative Funktionen $f(n)$?

(3+2+3 Punkte)

Aufgabe 26: (a) Zeigen Sie den folgenden Satz:
Sei $G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$ absolut konvergent für $\sigma > \sigma_a$ und $g(1) \neq 0$. Falls $G(s) \neq 0$ für $\sigma > \sigma_0 \geq \sigma_a$, dann gilt für s mit $\sigma > \sigma_0$ die Darstellung

$$G(s) = e^{F(s)},$$

mit

$$F(s) = \log(g(1)) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(g' * g^{-1})(n)}{\log n} \frac{1}{n^s}.$$

Dabei ist g^{-1} die Dirichlet–Inverse von g und $g'(n) = g(n) \log n$.
(Hinweis: Drücken Sie $F'(s)$ durch $G(s)$ und $G'(s)$ aus und integrieren Sie die daraus erhaltene Dirichlet–Reihe. Setzen Sie voraus, dass $D_{g^{-1}}(s)$ für $\sigma > \sigma_0$ absolut konvergiert.)

(b) Verwenden Sie (26a) um die folgende Darstellung der ζ–Funktion zu beweisen:

$$\zeta(s) = e^{F(s)}$$

mit

$$F(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} \frac{1}{n^s}.$$

(3+2 Punkte)

Abgabe bis zum 27.05.2013!