Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 20.4.2016

Sommersemester 2016

Mathematik II für Chemie

Übungsblatt 2

Aufgabe 9: Seien $a, b \in \mathbb{C}^3$ wie folgt gegeben: $a = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-3i \\ 1+2i \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1-5i \\ 3+i \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $||a||, ||b||$ und $\langle a, b\rangle$. Vergleichen Sie $||a|| \cdot ||b||$ mit $|\langle a, b\rangle|$. Was schließen Sie daraus? **(4 Punkte)**

Aufgabe 10: Die Wellenfunktionen der s-Elektronen im Wasserstoffatom sind kugelsymmetrisch, d.h. von der Form $u_n(r)$, wobei r den Abstand vom Atomkern bezeichnet. Wenn wir uns auf die s-Elektronen beschränken, dann reicht es, den Vektorraum der reellen stetigen Funktionen auf $[0, \infty)$ zu betrachten, wobei wir hier das innere Produkt

$$\langle f, g\rangle := \int_0^\infty r^2 f(r) g(r)\, dr.$$

benötigen. Die Wellenfunktion des 1s-Elektrons ist durch $u_1(r) = e^{-r}$ und die des 2s-Elektrons durch $u_2(r) = e^{-r/2}(2-r)$ gegeben. Berechnen Sie das innere Produkt $\langle u_1, u_2\rangle$. Bestimmen Sie Konstanten c_1 und c_2 so, dass $\|c_1 u_1\| = \|c_2 u_2\| = 1$ gilt. **(4 Punkte)**

Aufgabe 11:

(a) Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum, und seien $x, y \in V$. Sei $c := \frac{\langle y,x\rangle}{\|y\|^2}$. Zeigen Sie, dass $x - cy$ auf y orthogonal steht.

(b) Sei $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt. Sei $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Finden Sie ein $c \in \mathbb{R}$ so, dass $x - cy$ auf y orthogonal steht.

(c) Sei $V = C^0[0, \infty)$ mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g\rangle := \int_0^\infty e^{-r} f(r) g(r)\, dr.$$

Sei $f(r) = 1$ und $g(r) = r$. Bestimmen Sie ein $c \in \mathbb{R}$ so, dass $g - cf$ auf f orthogonal steht. **(2+1+2 Punkte)**

Aufgabe 12: In einem unitären Vektorraum ist die Norm durch $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ definiert. Zeigen Sie mit Hilfe der Eigenschaften des inneren Produkts, dass tatsächlich alle Eigenschaften der Norm erfüllt sind.
Hinweis: Um $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ zu zeigen, betrachten Sie zuerst das Quadrat dieser Ungleichung und verwenden Sie die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung. **(4 Punkte)**

Abgabe bis zum 27.4.2016!