Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 29.6.2016

Sommersemester 2016

Mathematik II für Chemie

Übungsblatt 12

Aufgabe 54: Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

d.h. bestimmen sie eine Matrix S und eine Diagonalmatrix D so, dass $S^{-1}AS = D$ gilt.
(4 Punkte)

Aufgabe 55: Sei

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisieren Sie die Matrix $\frac{\hbar}{2}\sigma_y$. **(3 Punkte)**

Aufgabe 56: Sei $P(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass komplexe Nullstellen nur paarweise vorkommen können, d.h. zeigen Sie: Ist z eine Nullstelle von $P(x)$, so ist auch $\bar{z}$ eine Nullstelle von $P(x)$. **(1 Punkt)**

Aufgabe 57: Für ein einzelnes Pendel gilt die Differentialgleichung $x''(t) = -\omega^2 x(t)$ mit der allgemeinen Lösung $x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ (dabei beschreibt $x(t)$ die Auslenkung des Pendels). Für zwei gleiche gekoppelte Pendel gilt die Differentialgleichung

$$x''(t) = \begin{pmatrix} x_1''(t) \\ x_2''(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\omega^2 - d & d \\ d & -\omega^2 - d \end{pmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}}_{=x(t)},$$

wobei $d > 0$ eine gewisse Konstante ist.

(a) Diagonalisieren Sie die Matrix A.

(b) Sei $S^{-1}AS = D$ und $y(t) := S^{-1}x(t)$. Zeigen Sie: $x''(t) = A\,x(t)$ gilt genau dann, wenn $y''(t) = D\,y(t)$ gilt.

(c) Sei D die Diagonalmatrix aus Aufgabe (a). Lösen Sie nun die Differentialgleichung $y''(t) = D\,y(t)$.

(d) Berechnen Sie nun die allgemeine Lösung für $x(t)$.

(e) Geben Sie speziell die Lösung für die Anfangsbedingungen $x_1(0) = x_2(0) = 1, x_1'(0) = x_2'(0) = 0$ an. Analog für die Anfangsbedingungen $x_1(0) = -x_2(0) = 1, x_1'(0) = x_2'(0) = 0$. Was fällt auf? **(3+1+2+1+2 Punkte)**

Abgabe bis zum 6.7.2016!