Universität Bielefeld
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 13.7.2016

Sommersemester 2016

Mathematik II für Chemie

Freiwilliges Übungsblatt 14

Aufgabe 62*: Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Funktion

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x^2+y^2}x \\ e^{x^2+y^2}y \end{pmatrix}.$$

An welchen Stellen ist die Jacobi-Matrix invertierbar, an welchen nicht?

Aufgabe 63*: Sei

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x + y \\ \sin(x) - y^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(u,v) = \begin{pmatrix} u - v^2 \\ u^3 + v \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Funktion $h(u,v) = f(g_1(u,v), g_2(u,v))$.

Aufgabe 64*: Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = x^2 + \frac{5}{3}x + y^4 - 3xy^2.$$

Handelt es sich um lokale Minima oder Maxima?

Ehemalige Klausuraufgaben

Aufgabe 65*: (a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die inverse Matrix !

(b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit A aus (a) und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 66*: (a) Ist die Funktion $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ linear?

(b) Ist die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 \cdot x_2$ linear?

Aufgabe 67*: Bestimmen Sie den Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 68*: Wir betrachten die Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Formel

$$M^n = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

für $n \geq 0$.

(b) Berechnen Sie nun e^{tM} unter Verwendung der Formel aus (a).

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = 2x + y, \quad \dot{y} = 2y, \qquad \text{mit} \qquad x(0) = y(0) = 1.$$

Aufgabe 69*: Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängig?
Bilden sie eine Basis des $\mathbb{R}^4$?

Aufgabe 70*: Sei $B = \begin{pmatrix} a & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Für welche a ist B nicht invertierbar?

Aufgabe 71*: (a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) Berechnen Sie alle Eigenvektoren des kleineren Eigenwerts von A.

(c) Von einer komplexen 3×3-Matrix B kennt man die Diagonalelemente $b_{11} = 1$, $b_{22} = -2$, $b_{33} = 3$ und zwei Eigenwerte $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$. Wie lautet der dritte Eigenwert λ_3?

Aufgabe 72*: (a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $S = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2i & 0 \\ 0 & 2 & i & 6 \\ 0 & 0 & 7i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\det(SAS^{-1})$.

Aufgabe 73*: Seien A und B unitäre $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie, dass AB und $((AB)^+)^{-1}$ ebenfalls unitäre Matrizen sind.

Aufgabe 74*: Die Matrix A besitze die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$, sowie die entsprechenden Eigenvektoren $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) A kann offensichtlich auf Diagonalform $D = S^{-1}AS$ gebracht werden. Wie lauten D und S?

(b) Wie lautet A?

(c) Berechnen Sie die Matrix $\cos(\pi A)$.

Aufgabe 75*: Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen der folgenden Funktionen

(a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x^2 y^3) \\ \log(1 + x^4) \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \dfrac{x^2}{\exp(x+y)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}$

(c) (freiwillige Zusatzaufgabe) Für welche x, y ist die Jacobi-Matrix aus Teilaufgabe (a) nicht invertierbar?

Aufgabe 76*: Berechnen Sie folgende Integrale:

(a) $\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} (x+y)^3 \, dx \, dy$

(b) $\iint\limits_{B_1(0)} \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} \, d(x,y).$

<u>Hinweise:</u>
- $B_1(0) = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$
- Verwenden Sie Polarkoordinaten.

Aufgabe 77*: Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \int_{1-y^2}^{1+y^2} (x+y^2) \, dx \, dy.$$

Aufgabe 78*: Berechnen Sie das Integral

$$\iint\limits_{B_1(0)} e^{x^2+y^2} \, dx \, dy.$$

<u>Hinweis:</u>
- $B_1(0)$ ist die Kreisscheibe $B_1(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$.
- Verwenden Sie Polarkoordinaten.