Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 25.10.2013

Wintersemester 2013/14

Elementare Zahlentheorie

Präsenzübungen 1

Aufgabe 1: Zeigen Sie: $0 \leq [2x] - 2[x] \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Was kann man über $[nx] - n[x]$ für $n \in \mathbb{N}$ aussagen?

Aufgabe 2: Sei p eine Primzahl und sei $e_p(a) \in \mathbb{N}_0$ die größte Zahl, so dass $p^{e_p(a)}$ ein Teiler von a ist.

(a) Drücken Sie $e_p(ab)$ durch $e_p(a)$ und $e_p(b)$ aus.

(b) Bestimmen Sie $e_p(\mathrm{ggT}(a,b))$ und $e_p(\mathrm{kgV}(a,b))$.

(c) Unter welcher Bedingung gilt $a|b$?

(d) Was bedeutet $e_p(a)e_p(b) = 0$ für alle p?

Aufgabe 3: Ein Teiler $d > 0$ von n heißt echter Teiler von n, falls $|n| > d$. Bestimmen Sie alle Zahlen n, für die das Produkt der echten Teiler kleiner als n ist.

Aufgabe 4: Sei $M = \{3n + 1 \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

(a) Zeigen Sie: $ab \in M$ für alle $a, b \in M$.

(b) Definieren Sie sinnvoll die Begriffe „irreduzibel in M“ und „prim in M“.

(c) Ist jede in M irreduzible Zahl auch prim in M? Ist jede Zahl in M eindeutig als Produkt (in M) irreduzibler Zahlen darstellbar?