Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 17.10.2013

Wintersemester 2013/14

Elementare Zahlentheorie

Anwesenheitsübungen 1. Tutorium

Aufgabe 1: Seine $a, b, c, m, n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(a) Aus $a \mid b \ \wedge \ b \mid c$ folgt $a \mid c$.

(b) Aus $a \mid b \ \wedge \ a \mid c$ folgt $a \mid mb + nc$.

(c) Sei $m \in \mathbb{Z}$ fest gewählt. Dann gilt $a \mid b$ genau dann, wenn $a \mid b + ma$.

(d) Sei $c \neq 0$. Dann gilt $a \mid b$ genau dann, wenn $ac \mid bc$.

Aufgabe 2: Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 674 und 159.

Aufgabe 3: Sei $a\mathbb{Z} := \{an \mid n \in \mathbb{Z}\}$ und $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} := \{am + bn \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie, dass $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathrm{ggT}(a, b)\mathbb{Z}$ und $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mathrm{kgV}(a, b)\mathbb{Z}$ für $a \neq 0 \neq b$ gilt. Wie könnte man $\mathrm{ggT}(a, 0)$ und $\mathrm{kgV}(a, 0)$ sinnvoll definieren?

Aufgabe 4: Sei R ein kommutativer Ring. Ein Unterring $I \subseteq R$ (muss 1 nicht enthalten) heißt Ideal, falls $ab \in I$ für alle $a \in I, b \in R$.

(a) Sei $a \in R$. Zeigen Sie, dass $aR := \{ab \mid b \in R\}$ ein Ideal ist, ein sogenanntes Hauptideal.

(b) Seien I und J Ideale von R. Zeigen Sie, dass auch $I + J := \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$ ein Ideal ist.

(c) Seien I und J Ideale von R. Sei $I \cdot J = IJ$ die Menge aller endlichen Summen der Form $\sum_i a_i b_i$ mit $a_i \in I, b_i \in J$. Zeigen Sie, dass IJ ein Ideal ist.

(d) Berechnen Sie $2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$ und $2\mathbb{Z} \cdot 3\mathbb{Z}$.