Universität Bielefeld
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 19.12.2013

Wintersemester 2013/14

Elementare Zahlentheorie

Übungszettel 10

Aufgabe 47: Berechnen Sie $\left(\frac{42}{127}\right)$, $\left(\frac{42}{125}\right)$ und $\left(\frac{42}{123}\right)$. **(3 Punkte)**

Aufgabe 48: Zeigen Sie:

(a) Sind a, b ungerade, so gilt

$$\frac{ab-1}{2} - \frac{a-1}{2} - \frac{b-1}{2} \equiv 0 \pmod 2.$$

(b) Sei $n = p_1 \cdots p_k$ ungerade. Zeigen Sie

$$\frac{n-1}{2} \equiv \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i - 1}{2} \pmod 2.$$

(c) Ist n ungerade, so gilt $\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{(n-1)/2}$.

(d) Ist n ungerade, so gilt $\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{(n^2-1)/8}$ **(1+1+1+3 Punkte)**

Aufgabe 49: Zeigen Sie: $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1 \Longleftrightarrow p \equiv 1 \pmod 3$. **(2 Punkte)**

Aufgabe 50: Zeigen Sie: Es gibt unendlich viele Primzahlen $p \equiv 1 \pmod 3$.
Hinweis: Seien $p_1, \ldots, p_n$ die ersten n Primzahlen $p_i \equiv 1 \pmod 3$. Betrachten Sie $(p_1 \cdots p_n)^2 + 3$, und verwenden Sie Aufgabe 49. **(3 Punkte)**

Aufgabe 51: Sei $F_n = 2^{2^n} + 1$. Zeigen Sie, dass $\left(\frac{3}{F_n}\right) = -1$ gilt. *Hinweis:* Zeigen Sie zuerst $F_n \equiv 2 \pmod 3$. **(2 Punkte)**

Zusätzliche Übungsaufgaben vom Klausurtyp

Aufgabe 52:

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Zeigen Sie, dass $\left(\frac{a}{n^3}\right) = \left(\frac{a}{n}\right)$. **(1 Bonuspunkt)**

(b) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von $x^2 - 4x - 21$ und $x^3 - 4x^2 - 20x - 7$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus. **(1 Bonuspunkt)**

(c) Sei $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass die Summe aller zu n teilerfremden natürlichen Zahlen $< n$ durch $\frac{n}{2}\varphi(n)$ gegeben ist.
Hinweis: Versuchen Sie diese Aufgabe zuerst ohne den Hinweis auf der Rückseite zu lösen. **(1 Bonuspunkt)**

(d) Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen der Form $p = 3k + 2$ gibt. **(1 Bonuspunkt)**

(e) Sei $n \in \mathbb{N}$ weder Primzahl noch Quadrat einer Primzahl. Berechnen Sie $(n-1)! \pmod n$. **(1 Bonuspunkt)**

Abgabe bis zum 9.1.2014!

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Jahr 2014!

Hinweis zu Aufgabe 52c: Denken Sie daran, wie Gauss die Summe der Zahlen von 1 bis 100 bestimmt hat, und begründen Sie die entscheidenden Rechenschritte.