Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 9.1.2014

Wintersemester 2013/14

Elementare Zahlentheorie

Übungszettel 11

Aufgabe 53: Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Sei $n = a^2 + b^2$. Dann gilt $n \not\equiv 3 \pmod 4$. Falls a und b ungerade sind, so ist n kein Quadrat.

(b) Sei $n = a^2 + b^2 + c^2$. Dann gilt $n \not\equiv 7 \pmod 8$. **(2+2 Punkte)**

Aufgabe 54: (a) Sei $\xi = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\xi] := \{m + n\xi \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ ein Ring ist. Skizzieren Sie einen geeigneten Ausschnitt der Menge $\mathbb{Z}[\xi]$.
Hinweis: Sie dürfen die Rechenregeln für Addition und Multiplikation als bekannt voraussetzen, d.h., Sie müssen nur die Abgeschlossenheit zeigen.

(b) Bestimmen Sie die Einheiten von $\mathbb{Z}[\xi]$.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\xi]$ ein euklidischer Ring ist.
Hinweis: Division mit Rest mit geeigneter Normfunktion. **(2+1+2 Punkte)**

Aufgabe 55: In einem nullteilerfreien kommutativen Ring R können wir Teilbarkeit wie üblich definieren. Ein gemeinsamer Teiler von $a, b \in R$ ist dann jedes Element $c \in R$, für das $c \mid a$ und $c \mid b$ gilt. Ein größter gemeinsamer Teiler g von a und b ist dann jeder Teiler g von a und b, für den $d \mid a \wedge d \mid b \Longrightarrow d \mid g$ für alle gemeinsamen Teiler d von a und b gilt.

(a) Zeigen Sie: Sind g und g' größte gemeinsame Teiler von a und b, so existiert eine Einheit u mit $g' = gu$.

(b) Wir kennen $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] := \{m + ni\sqrt{5} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ aus Aufgabe 8. Bestimmen Sie alle gemeinsamen Teiler von 9 und $6 + 3i\sqrt{5}$.
Hinweis: Bedenken Sie, dass ein gemeinsamer Teiler $a + ib\sqrt{5}$ auch alle Linearkombinationen teilt. Welche Zahlen muss $a^2 + 5b^2$ teilen?

(c) Besitzen 9 und $6 + 3i\sqrt{5}$ einen größten gemeinsamen Teiler?

(d) Ist $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ ein euklidischer Ring? **(1+2+1+1 Punkte)**

Aufgabe 56: Bestimmen Sie eine Primfaktorzerlegung von $4 + 2i$ und $5i - 3$. **(2 Punkte)**

Abgabe bis zum 16.1.2014!