Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 16.1.2014

Wintersemester 2013/14

Elementare Zahlentheorie

Übungszettel 12

Aufgabe 57: Bestimmen Sie eine Primfaktorzerlegung von $35 + 280i$ und $6 - 7i$. **(2+2 Punkte)**

Aufgabe 58: Bestimmen Sie alle (bis auf die Reihenfolge der Summanden) verschiedene Darstellungen von 85 als Summe zweier Quadrate natürlicher (!) Zahlen. **(2 Punkte)**

Aufgabe 59: Sei $\xi = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Der Ring $\mathbb{Z}[\xi]$ der Eisensteinzahlen ist ein Hauptidealring, d.h., die irreduziblen Elemente sind genau die primen Elemente und die Primfaktorzerlegung ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren und Multiplikation mit Einheiten eindeutig. Sei $N(z) = |z|^2$. Zeigen Sie:

(a) $z \in \mathbb{Z}[\xi]$ ist prim, falls $N(z)$ eine Primzahl ist.

(b) Jedes in $\mathbb{Z}[\xi]$ prime Element π teilt eine Primzahl p.

(c) Besitzt eine Zahl Primzahl p die Darstellung $p = m^2 + mn + n^2$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$, so sind $m + n\xi$ und $m + n\bar{\xi}$ prim in $\mathbb{Z}[\xi]$.

(d) 3 ist zusammengesetzt. Zerlegen Sie 3 in prime Elemente.

(e) Falls $p \equiv 2 \pmod 3$, so ist p prim in $\mathbb{Z}[\xi]$. **(1+1+1+1+2 Punkte)**

(f)* Was kann man im Fall $p \equiv 1 \pmod 3$ aussagen?
Hinweis: Aufgabe 49. **(1 Bonuspunkt)**

Aufgabe 60: (a) Berechnen Sie die Kettenbruchdarstellung von $\frac{85}{37}$.

(b) Die Fibonacci-Zahlen f_n sind definiert durch $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $f_2 = f_1 = 1$. Geben Sie die Kettenbruchdarstellung von $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ an.

(c) Berechnen Sie $[2, 1, 3, 1, 4]$. **(1+2+1 Punkte)**

Abgabe bis zum 23.1.2014!