Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 23.1.2014

Wintersemester 2013/14

Elementare Zahlentheorie

Übungszettel 13

Aufgabe 61: p_n, q_n seien rekursiv definiert durch $p_{-1} = 1, p_0 = x_0, q_{-1} = 0, q_0 = 1$ und $p_n = x_n p_{n-1} + p_{n-2}, q_n = x_n q_{n-1} + q_{n-2}$ für $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} x_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2 Punkte)

Aufgabe 62: Berechnen Sie die Kettenbruchdarstellung von $\sqrt{3}$. **(2 Punkte)**

Aufgabe 63: Sei $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ ein unendlicher Kettenbruch und $\beta = [a_k, a_{k+1}, \ldots]$.

(a) Zeigen Sie $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, \beta]$.

(b) Berechnen Sie den Kettenbruch $[3, 4, 3, 4, 3, 4, \ldots]$. **(2+2 Punkte)**

Aufgabe 64: Sei $x_0, x_1, \ldots$ eine Folge reeller Zahlen mit $x_i > 0$ für $i \geq 1$, und seien p_n, q_n wie in der Vorlesung definiert, d.h. $\frac{p_k}{q_k} = [x_0, x_1, \ldots, x_k]$.

(a) Zeigen Sie, dass $\frac{q_k}{q_{k-1}} = [x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1]$ für $k \geq 1$ gilt.

(b) Berechnen Sie $\frac{p_k}{p_{k-1}}$. **(2+2 Punkte)**

Aufgabe 65: Sei $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ ein unendlicher Kettenbruch. Zeigen Sie:

$$-\alpha = \begin{cases} [-a_0 - 1, 1, a_1 - 1, a_2, a_3, \ldots] & \text{falls } a_1 > 1 \\ [-a_0 - 1, a_2 + 1, a_3, a_4, \ldots] & \text{falls } a_1 = 1. \end{cases}$$

Hinweis: Sei $-\alpha = [b_0, b_1, b_2, \ldots]$. Drücken Sie $\beta_i = [b_i, b_{i+1}, b_{i+2}, \ldots]$ durch $\alpha_i = [a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots]$ aus. **(4 Punkte)**

Abgabe bis zum 30.1.2014!