

Wintersemester 2013/14

Elementare Zahlentheorie**Übungszettel 2****Aufgabe 9:** Zeigen Sie:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{2n}{n} < 2^{2n}$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{2^{2n}}{2^n} \leq \binom{2n}{n}$, wobei das Gleichheitszeichen nur für $n = 1$ gilt.

Hinweis: Es gilt $\binom{2n}{n} > \binom{2n}{k}$ für $k \neq n$. **(1+2 Punkte)**

Aufgabe 10: Sei p eine Primzahl und sei $e_p(a) \in \mathbb{N}_0$ die größte Zahl, sodass $p^{e_p(a)}$ ein Teiler von a ist. Zeigen Sie

(a) $e_p\left(\binom{2n}{n}\right) = 1$ für $n < p \leq 2n$,

(b) $e_p\left(\binom{2n}{n}\right) = 0$ für $\frac{2n}{3} < p \leq n$,

(c) $e_p\left(\binom{2n}{n}\right) \leq 1$ für $\sqrt{2n} < p$ und

(d) $e_p\left(\binom{2m+1}{m}\right) = 1$ für $m+1 < p \leq 2m+1$ **(1+1+1+1 Punkte)**

Aufgabe 11: Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Arithmetik:

(a) Falls a und b teilerfremd sind, so gilt $\text{ggT}(a, bc) = \text{ggT}(a, b) \text{ggT}(a, c)$.

(b) Es gilt

$$\frac{\text{ggT}(a, b) \text{ggT}(b, c) \text{ggT}(c, a)}{\text{ggT}(a, b, c)^2} = \frac{\text{kgV}(a, b) \text{kgV}(b, c) \text{kgV}(c, a)}{\text{kgV}(a, b, c)^2}$$

(2+3 Punkte)**Aufgabe 12:** Zeigen Sie, dass $n!$ für $n > 1$ keine k -te Potenz einer natürlichen Zahl sein kann ($k > 1$). **(2 Punkte)****Aufgabe 13:** Sei $\tau(n)$ die Zahl der (positiven) Teiler von n . Zeigen Sie, dass das Produkt aller Teiler von n durch $\sqrt{n^{\tau(n)}}$ gegeben ist. **(2 Punkte)****Abgabe bis zum 31.10.2013!**