Universität Bielefeld
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 7.11.2013

Wintersemester 2013/14

Elementare Zahlentheorie

Übungszettel 4

Aufgabe 19: Sei φ die Euler'sche φ-Funktion.

(a) Geben Sie alle n an, für die $\varphi(n)$ ungerade ist.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $d \in \mathbb{N}$ ein Teiler von n. Drücken Sie die Zahl aller natürlichen Zahlen k mit $1 \leq k \leq n$ und $\mathrm{ggT}(k,n) = d$ durch die Euler'sche φ-Funktion aus.

(c) Berechnen Sie $\sum_{d|n} \varphi(\frac{n}{d})$ und $\sum_{d|n} \varphi(d)$.
Hinweis: Benützen Sie (b). **(1+1+2 Punkte)**

Aufgabe 20: (a) Lösen Sie das folgende System von Kongruenzen:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod 4 \\ x &\equiv 2 \pmod 5 \\ x &\equiv 1 \pmod 6 \end{aligned}$$

(b) Seien $k, \ell, m \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Geben Sie ein Kriterium dafür an, dass das System

$$\begin{aligned} x &\equiv a \pmod{k\ell} \\ x &\equiv b \pmod{km} \end{aligned}$$

eine Lösung hat. **(2+2 Punkte)**

Aufgabe 21: Sei p eine Primzahl.

(a) Zeigen Sie: $\binom{p}{k}$ ist durch p teilbar, falls $1 \leq k \leq p-1$.

(b) Berechnen Sie $(a+b)^p \pmod p$.

(c) Beweisen Sie $a^p = a \pmod p$ ohne Verwendung des Satzes von Euler–Fermat mit Hilfe vollständiger Induktion und 21b. **(1+1+2 Punkte)**

Aufgabe 22: Sei k die Ordnung von a modulo m. Zeigen Sie:

(a) $a^h \equiv 1 \pmod m$ genau dann, wenn $k|h$.

(b) $a^i \equiv a^j \pmod m$ genau dann, wenn $i \equiv j \pmod k$.

(c) Die Restklassen $[a]_m, [a^2]_m, \dots, [a^k]_m$ sind paarweise verschieden.

(d) $\mathrm{ord}_m(a^h) = \frac{k}{\mathrm{ggT}(h,k)}$.

(e) $\mathrm{ord}_m(a^h) = k$ genau dann, wenn $\mathrm{ggT}(h,k) = 1$. **(1+1+1+2+1 Punkte)**

Abgabe bis zum 14.11.2013!