Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 5.12.2013

Wintersemester 2013/14

Elementare Zahlentheorie

Übungszettel 8

Aufgabe 37: Zeigen Sie: Eine ungerade Zahl $n = 2k+1 \geq 3$ ist genau dann eine Primzahl, falls $n = (k+1)^2 - k^2$ die einzige Darstellung von n von der Form $n = a^2 - b^2$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ ist.
(4 Punkte)

Aufgabe 38: Sei $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$ und sei p eine Primzahl, die $a(a^2-1)$ nicht teilt. Zeigen Sie:

(a) Sei a ungerade. Dann gilt $a^{2(p-1)} \equiv 1 \pmod{2(a^2-1)}$.
Hinweis: $a^2 = (a^2-1)+1$ und $a^{2(p-1)} = (a^4)^{\frac{(p-1)}{2}}$.

(b)* $\frac{a^{2p}-1}{a^2-1}$ ist eine Pseudoprimzahl zur Basis a.
Hinweis: $x-1$ ist ein Teiler von $x^n - 1$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
(2 Punkte + 4 Bonuspunkte)

Aufgabe 39: Zeigen Sie, dass 2465 eine Carmichael-Zahl ist. **(2 Punkte)**

Aufgabe 40: Zeigen Sie:

(a) Ist n ungerade, so ist $x+1$ ein Teiler von $x^n + 1$.

(b) Ist $2^k + 1$ eine Primzahl, so ist k eine Zweierpotenz.

(c) Jede Fermatzahl F_n, d.h. jede Zahl der Form $F_n = 2^{2^n} + 1$, ist eine Primzahl oder Pseudoprimzahl zur Basis 2. **(1+2+2 Punkte)**

Aufgabe 41: Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie $\mathrm{ggT}(p^r - 1, \varphi(p^r)) = p - 1$. **(2 Punkte)**

Abgabe bis zum 12.12.2013!