Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 12.12.2013

Wintersemester 2013/14

Elementare Zahlentheorie

Übungszettel 9

Aufgabe 42: Sei $p > 3$ eine Primzahl. Berechnen Sie $\left(\frac{3}{p}\right)$ mit Hilfe des Lemmas von Gauss.

(4 Punkte)

Aufgabe 43: Bestimmen Sie alle Lösungen der Kongruenzen

(a) $x^2 \equiv 4 \pmod{35}$

(b) $x^2 \equiv 2 \pmod{77}$.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 44: Sei $a \equiv 1 \pmod 8$ und $r \geq 3$. Betrachten Sie die Kongruenz $x^2 \equiv a \pmod{2^r}$. Zeigen Sie:

(a) Sei x eine Lösung der Kongruenz $x^2 \equiv a \pmod{2^r}$. Dann ist jede weitere Lösung von der Form xy, wobei y eine Lösung der Kongruenz $y^2 \equiv 1 \pmod{2^r}$ ist.

(b) Die Kongruenz $x^2 \equiv a \pmod{2^r}$ besitzt genau 4 Lösungen.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 45: Zeigen Sie die folgende Behauptung: Sei $p > 2$ eine Primzahl und q die kleinste natürliche Zahl mit $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$. Dann ist q eine Primzahl und es gilt $q < \sqrt{p} + 1$.

(4 Punkte)

Aufgabe 46*: Sei $p > 2$ eine Primzahl und sei f eine Funkion auf der Menge der zu p teilerfremden Zahlen mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $f(a) \in \{-1, 1\}$,

(b) $f(ab) = f(a)f(b)$,

(c) $f(a) = f(b)$, falls $a \equiv b \pmod p$.

Zeigen Sie, dass dann entweder $f(a) = 1$ für alle a oder $f(a) = \left(\frac{a}{p}\right)$ für alle a gilt.

(2 Bonuspunkte)

Abgabe bis zum 19.12.2013!