Universität Bielefeld
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 9.1.2015

Wintersemester 2014/15

Diskrete Mathematik

Übungszettel 11

Aufgabe 56: Geben Sie alle Lösungen der folgenden Kongruenzen an.

(a) $24x \equiv 3 \pmod 9$

(b) $7x \equiv 5 \pmod{14}$

(c) $3x \equiv 2 \pmod 7$ **(5 Punkte)**

Aufgabe 57: Sei $n = \sum_{i=0}^{\ell} 10^i a_i$ die Dezimaldarstellung einer Zahl $n \in \mathbb{N}$, $Q'(n) = \sum_{i=0}^{\ell}(-1)^i a_i$ ihre alternierende Ziffernsumme, $Q_2(n) = \sum_i (a_{2i} + 10a_{2i+1})$ ihre Ziffernsumme zweiter Stufe und $Q_k(n) = \sum_i (a_{ki} + 10a_{ki+1} + \ldots 10^{k-1} a_{ki+k-1})$ ihre Ziffernsumme k-ter Stufe.

(a) Zeigen Sie $11 \mid n \iff 11 \mid Q'(n)$.

(b) Zeigen Sie $11 \mid n \iff 11 \mid Q_2(n)$.

(c) Bestimmen Sie eine gewichtete Ziffernsumme $Q_{(g)}(n) = \sum_{i=0}^{\ell} g_i a_i$ so, dass $37 \mid n \iff 37 \mid Q_{(g)}(n)$ gilt.

(d) Bestimmen Sie das kleinste k, für das $37 \mid n \iff 37 \mid Q_k(n)$ gilt.

(e) Gibt es Zusammenhänge zwischen den Aufgaben (c) und (d)?

(1+1+2+1+1 Punkte)

Aufgabe 58: Lösen Sie das folgende System von Kongruenzen:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod 4 \\ x &\equiv 2 \pmod 5 \\ x &\equiv 1 \pmod 6 \end{aligned}$$

(3 Punkte)

Aufgabe 59: Seien $k, \ell \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Zeigen Sie, dass x genau dann eine Lösung der Kongruenz $x \equiv a \pmod{k\ell}$ ist, wenn x Lösung des Systems

$$\begin{aligned} x &\equiv a \pmod k \\ x &\equiv a \pmod \ell \end{aligned}$$

ist. *Hinweis:* Erinnern Sie sich, dass $m, n \in \mathbb{Z}$ existieren, sodass $1 = mk + n\ell$ gilt.

(2 Punkte)

Aufgabe 60*: Sei $n > 1$. Besitzt die Kongruenz

$$nx \equiv 5 \pmod{2n+1}$$

eine Lösung? Wenn ja, wie lautet sie? **(2 Bonuspunkte)**

Abgabe bis zum 16.1.2015!