Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 17.10.2014

Wintersemester 2014/15

Diskrete Mathematik

Übungszettel 2

Aufgabe 10: (a) Zeigen Sie, dass

$$|X \cup Y| = |X \setminus Y| + |Y \setminus X| + |X \cap Y|$$

für beliebige endliche Mengen gilt.

(b) Wieviele Elemente enthält $X \setminus Y$, wenn $|X| = m$ und $|X \cap Y| = k$ gilt?

(c) Zeigen Sie

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$

(1+1+1 Punkte)

Aufgabe 11: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n$. Bezeichnen Sie mit $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge. Zeigen Sie lediglich unter Benutzung dieser Definition, dass gilt:

(a) $\binom{n}{0} = 1$.

(b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(c) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

(d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Hinweis: Die Ihnen bekannte Identität $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ darf hier ausdrücklich *nicht* verwendet werden. Für (b) und (c) müssen Sie entsprechende Bijektionen konstruieren. Für (c) benötigen Sie zusätzlich die Summenregel $|X \dot\cup Y| = |X| + |Y|$, wobei $\dot\cup$ andeutet, dass es sich um eine disjunkte Vereinigung handelt, also $X \cap Y = \varnothing$ gilt. Aufgabe (d) folgt schließlich mit Hilfe von Aufgabe 7(c). **(1+2+2+1 Punkte)**

Aufgabe 12: Eine Permutation, deren Zykeldarstellung höchstens einen Zykel mit einer Länge k größer als 1 enthält, heißt zyklische Permutation der Länge k. So ist beispielsweise (325) ist eine zyklische Permutation der Länge 3, während (12)(34) keine zyklische Permutation ist.

Wieviele zyklische Permutationen der Länge $k \leq n$ gibt es in S_n?
Hinweis: Beachten Sie, dass die Zykeldarstellung nicht eindeutig ist, insbesondere gilt $(j_1 j_2 \cdots j_k) = (j_2 \cdots j_k j_1)$. **(2 Punkte)**

Aufgabe 13: Eine Permutation, die genau zwei Elemente vertauscht, heißt Transposition.

(a) Sei $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\pi \circ (12) \circ \pi^{-1}$.

(b) Sei nun π eine beliebige Permutation. Zeigen Sie, dass $\pi \circ (12) \circ \pi^{-1}$ wieder eine Transposition ist. Welche zwei Elemente werden vertauscht?

(c) Wie lautet die Inverse der Transposition $(j\,k)$?

(bitte wenden)

(d) Sei π eine Permutation, die nur die ersten k Elemente vertauscht, und für die $\pi(k) \neq k$ gilt (wie groß ist k mindestens?) Zeigen Sie, dass π in der Form $\pi = \tau \circ \sigma$ dargestellt werden kann, wobei τ eine Transposition und σ eine Permutation ist, die nur die ersten $k-1$ Elemente vertauscht. *Hinweis:* Wählen Sie $\tau = (k\,\pi(k))$.

(e) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass sich jede Permutation von n Elementen als Produkt von höchstens $n-1$ Transpositionen schreiben lässt.
Hinweis: Das Produkt von null Faktoren ist die Identität. **(1+2+1+2+2 Punkte)**

Abgabe bis zum 24.10.2014!