Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 24.10.2014

Wintersemester 2014/15

Diskrete Mathematik

Übungszettel 3

Aufgabe 14: (a) Zeigen Sie die folgende Behauptung: Seien $\pi, \sigma \in S_n$. Die Permutation π vertausche nur die Elemente der Menge $X \subseteq \{1, \ldots, n\}$, d.h. $\pi(i) = i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus X$. Analog permutiere σ nur die Elemente von Y. Falls X und Y disjunkt sind, so gilt $\pi \circ \sigma = \sigma \circ \pi$.

(b) Gilt die Umkehrung, d.h. folgt aus $\pi \circ \sigma = \sigma \circ \pi$, dass X und Y disjunkt sind?

(c) Die Permutation π bestehe aus zwei Zykeln, einem der Länge k und einem der Länge ℓ. Zeigen Sie, dass die Ordnung von π ein Teiler von $\mathrm{kgV}(k, \ell)$ ist. Warum ist die Ordnung von von π sogar gleich $\mathrm{kgV}(k, \ell)$? **(2+1+2 Punkte)**

Aufgabe 15: Verwenden Sie den Binomialsatz, um die folgenden Formeln zu beweisen:

(a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Was gilt im Fall $n = 0$?

(c) $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
Hinweis: Differenzieren Sie $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} x^k = (1+x)^n$. **(1+2+1 Punkte)**

Aufgabe 16: Für $k > n$ ist $\binom{n}{k} := 0$ definiert.

(a) Zeigen Sie für $|x| < 1$

$$\frac{x^\ell}{(1-x)^{\ell+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m}{\ell} x^m .$$

Hinweis: Beweisen Sie die Formel zuerst für $\ell = 0$. Bilden Sie dann die ℓ-te Ableitung von $\frac{1}{(1-x)}$.

(b) Berechnen Sie nun die Summe

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{j} \binom{n-m}{k-j},$$

indem Sie die obige Reihenentwicklung in die Gleichung

$$x \left(\frac{x^j}{(1-x)^{j+1}} \right) \left(\frac{x^{k-j}}{(1-x)^{k-j+1}} \right) = \frac{x^{k+1}}{(1-x)^{k+2}}$$

einsetzen und einen Koeffizientenvergleich machen. **(3+2 Punkte)**

Aufgabe 17: (a) Sechs Tafeln Milchschokolade und vier Tafeln Nussschokolade sollen auf zehn Kinder aufgeteilt werden, so dass jedes Kind genau eine Tafel erhält. Wieviele Möglichkeiten gibt es?

(b) In der darauffolgenden Woche sollen drei Milchschokoladen, zwei Nussschokoladen und fünf Erdbeerschokoladen verteilt werden. Wieviele Möglichkeiten gibt es diesmal?

(1+2 Punkte)

Abgabe bis zum 31.10.2014!