Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 14.11.2014

Wintersemester 2014/15

Diskrete Mathematik

Übungszettel 5

Aufgabe 22: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen. Sei $\lceil x\rceil$ die kleinste natürliche Zahl größer oder gleich x. Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion die Identität

$$a_n := \sum_{k=\lceil n/2\rceil}^{n} \binom{k}{n-k} = f_{n+1}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$.

Hinweis: Für den Induktionsschritt müssen Sie die Rekursion $a_n = a_{n-1}+a_{n-2}$ nachweisen. Verwenden Sie die bekannte Formel $\binom{k}{n}+\binom{k}{n+1} = \binom{k+1}{n+1}$. Betrachten Sie die Fälle ungerader n und gerader n getrennt. Wie lautet der Induktionsanfang? **(4 Punkte)**

Aufgabe 23: Gegeben sei die Rekursion

$$a_0 = 2, a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2} \text{ für } n \geq 2.$$

(a) Drücken Sie die Rekursion in Matrixschreibweise aus und berechnen Sie die Eigenwerte der entsprechenden Matrix A.

(b) Berechnen Sie die Eigenvektoren von A und schreiben sie $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Eigenvektoren.

(c) Leiten Sie eine explizite Formel für a_n her. **(2+2+2 Punkte)**

Aufgabe 24: Betrachten Sie die Rekursion

$$a_0 = 0, a_1 = 4$$
$$a_n = -2a_{n-1} + 15a_{n-2} \text{ für } n \geq 2.$$

(a) Leiten Sie eine Gleichung für die erzeugende Funktion $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ her und lösen Sie diese.

(b) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von $g(x)$.

(c) Berechnen Sie die Taylorreihe von $g(x)$ und geben Sie eine geschlossene Formel für a_n an.

(d) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, und geben Sie den Konvergenzradius von $g(x)$ an. **(2+2+2+2 Punkte)**

Abgabe bis zum 21.11.2014!