Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 21.11.2014

Wintersemester 2014/15

Diskrete Mathematik

Übungszettel 6

Aufgabe 25: Sei a_n die Zahl der RNA-Stränge der Länge n, in denen die Base Adenin nie unmittelbar auf sich selbst folgt.

(a) Zeigen Sie, dass $a_1 = 4$ und $a_2 = 15$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für $n \geq 3$ gilt:

$$a_n = 3a_{n-1} + 3a_{n-2}.$$

(c) Leiten Sie eine explizite Formel für a_n her. **(2+2+2 Punkte)**

Aufgabe 26: Für $c \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$ ist der Binomialkoeffizient $\binom{c}{n}$ durch

$$\binom{c}{n} = \begin{cases} 0 & \text{für } n < 0 \\ 1 & \text{für } n = 0 \\ \frac{(c)_n}{n!} & \text{für } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

$$\binom{\frac{1}{2}}{m+1} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+1}} \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m}$$

gilt. **(2 Punkte)**

Aufgabe 27: Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es, aus Rechtecken der Seitenlängen 1×1, 1×2 und 2×2 ein Rechteck mit Seitenlängen $2 \times n$ zu legen? Bestimmen Sie eine Rekursion und lösen Sie diese.
Hinweis: Es gibt nur stehende 1×2-Rechtecke, keine liegenden. **(4 Punkte)**

Aufgabe 28: Lösen Sie die Rekursion

$$\begin{aligned} a_n &= -4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 1 & \text{für } n &\geq 2 \\ a_0 &= 1 & a_1 &= 0 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Methode der erzeugenden Funktionen. Leiten Sie also zuerst eine Gleichung für die erzeugende Funktion her und lösen Sie diese. Berechnen Sie dann die Taylorreihe und bestimmen Sie dann die a_n. **(4 Punkte)**

Aufgabe 29*: Betrachten Sie die Rekursion

$$\begin{aligned} a_n &= na_{n-1} + 2n \quad \text{für } n \geq 1 \\ a_0 &= \alpha\,. \end{aligned}$$

Geben Sie eine Gleichung für die exponentielle erzeugende Funktion $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ an, und berechnen Sie daraus $g(x)$. *Hinweis:* Es ist nur die erzeugende Funktion gefragt, nicht die Taylorreihe oder eine explizite Formel für die a_n. **(2 Bonuspunkte)**

Abgabe bis zum 28.11.2014!