Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

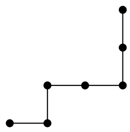
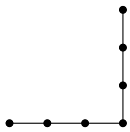
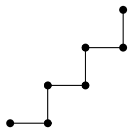
Bielefeld, 28.11.2014

Wintersemester 2014/15

# Diskrete Mathematik

## Übungszettel 7

**Aufgabe 30:** Betrachten Sie Pfade auf dem Quadratgitter $\{(k,\ell) \mid k,\ell \in \mathbb{N}\}$. Sei $a_n$ die Zahl aller Pfade von $(0,0)$ nach $(n,n)$ mit den folgenden Eigenschaften: 1) es sind nur Schritte nach rechts und nach oben zugelassen, d.h. nur Schritte $(1,0)$ und $(0,1)$ (insgesamt sind also $2n$ Schritte notwendig). 2) Kein Punkt des Pfades befindet sich über der Diagonalen, d.h., für alle Punkte $(k,\ell)$ des Pfades gilt $k \geq \ell$.

Beispielsweise sind  und  und  erlaubte Pfade von $(0,0)$ nach $(3,3)$. Zeigen Sie, dass die $a_n$ durch die Catalan-Zahlen gegeben sind.
*Hinweis:* Bestimmen Sie zuerst $a_1$ und $a_2$ und leiten Sie dann eine Rekursion für $a_n$ her.

**(4 Punkte)**

**Aufgabe 31:** Gegeben seien die Catalan-Zahlen $C_n$.

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Rekursion gilt: $C_0 = 1, C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n$ für $n \geq 0$.

(b) Berechnen Sie den Konvergenzradius der erzeugenden Funktion.

(c) Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{4^n}$ konvergiert.
*Hinweis:* Betrachten Sie die Polynome $\sum_{n=0}^{N} C_n x^n$ für $x \leq \frac{1}{4}$. Finden Sie für $x < \frac{1}{4}$ eine obere Schranke für $\sum_{n=0}^{N} C_n x^n$ und benutzen Sie die Stetigkeit von Polynomen, um eine obere Schranke für $\sum_{n=0}^{N} \frac{C_n}{4^n}$ zu bekommen. Welchen Konvergenzsatz können Sie jetzt verwenden?

(d) Berechnen Sie die Summe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{4^n}$, auch wenn Sie ihre Konvergenz nicht gezeigt haben sollten.

**(1+1+2+1 Punkte)**

**Aufgabe 32:** Seien $s(n,k)$ die Stirling-Zahlen erster Art.

(a) Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} s(n,k)\, x^k = (x)_n := x(x-1) \cdot \ldots \cdot (x-(n-1)) \, .$$

(b)* Wie lautet eine analoge Formel für die Binomialkoeffizienten?

**(3 Punkte +1 Bonuspunkt)**

**Aufgabe 33:** (a) Zeigen Sie mit Hilfe der Rekursionsformel aus der Vorlesung für die Stirling-Zahlen erster Art, dass

$$s(n, n-2) = \frac{3n-1}{4} \binom{n}{3}$$

für alle $n \geq 3$ gilt.
*Hinweis:* Verwenden Sie die Formel für $s(n, n-1)$ aus der Vorlesung.

(b) Gilt die Formel auch für $n = 2$?

**(3+1 Punkte)**

**Abgabe bis zum 5.12.2014!**