Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 12.12.2014

Wintersemester 2014/15

Diskrete Mathematik

Übungszettel 9

Aufgabe 38: Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x - 2$ und $x^4 - 1$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus. **(4 Punkte)**

Aufgabe 39: Betrachten Sie den euklidischen Algorithmus $r_{-1} = a$, $r_0 = b$, $r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k$ für zwei ganze Zahlen a, b mit $0 < |b| < |a|$. Die Folgen m_k und n_k seien rekursiv durch

$$\begin{aligned} m_k &= m_{k-2} - q_k m_{k-1} \qquad & m_{-1} &= 1, m_0 = 0 \\ n_k &= n_{k-2} - q_k n_{k-1} \qquad & n_{-1} &= 0, n_0 = 1 \end{aligned}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $r_k = m_k a + n_k b$ für $-1 \le k \le \ell - 1$ gilt, wobei ℓ die kleineste Zahl ist, für die $r_\ell = 0$ gilt.

(b) Gilt die Gleichung auch noch für $k = \ell$? **(3+1 Punkte)**

Aufgabe 40: Zeigen Sie mit Hilfe der Siebformel, dass

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k} \left(p_i^{r_i} - p_i^{r_i - 1} \right) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i} \right)$$

gilt, falls $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ die Primfaktorzerlegung von n ist (die p_i sind alle verschieden). *Hinweis:* Überlegen Sie sich, dass die Zahl der durch p_i teilbaren Zahlen $0 \le m < n$ durch $\frac{n}{p_i}$, die Zahl der durch p_i und p_j teilbaren Zahlen durch $\frac{n}{p_i p_j}$ usw. gegeben ist. **(4 Punkte)**

Aufgabe 41: Sei φ die Euler'sche φ-Funktion.

(a) Bestimmen Sie alle Primpotenzen p^r, für die $\varphi(p^r)$ ungerade ist.

(b) Bestimmen Sie alle n, für die $\varphi(n)$ ungerade ist.

(c) Bestimmen Sie alle n, für die $\varphi(n) = 2$ gilt.

(d) Ist $\varphi(n)$ vollständig multiplikativ? **(1+1+1+1 Punkte)**

Abgabe bis zum 19.12.2014!